Matrice jacobienne pour l'ajustement de faisceaux

1 Algorithme d'ajustement de faisceaux

A l'issue de la mise en correspondances, l'information disponible est représentée sous la forme de "chemins" ("tracks" en anglais). Un "chemin" est propre à un point 3D et indique pour chaque image (si le point 3D est vu dans cette image) l'indice du point 2D auquel il correspond (parmi tous les points détectés dans l'image). Pour chaque image $\mathtt{I}_j$, si C_j points 3D sont vus dans cette image, nous disposons de deux vecteurs p2DId et p3DId de longueur C_j. L'élément $\mathrm{p2DId}\left(c\right)$ indique l'indice du point 2D parmi tous les points ayant été détectés dans $\mathtt{I}_j$, alors que $\mathrm{p3DId}\left(c\right)$ indique l'indice du point 3D.

Ainsi l'algorithme d'ajustement de faisceaux consiste à minimiser la fonction de coût suivante :

$$\min_{\substack{\{\mathtt{R}_{wj},\mathbf{t}_{wj}\}_{j=1,M} \\ \{\mathbf{u}_i^w\}_{i=1\ldots N}}} , \sum_{j=1}^{M}\sum_{c=1}^{C_j}\left\|\mathbf{p}_{j,\mathrm{p2DId}(c)} - \mathtt{K}\pi\left(\mathtt{R}_{wj}^{\top}\left(\mathbf{u}_{\mathrm{p3DId}(c)}^{w} - \mathbf{t}_{wj}\right)\right)\right\|_2^2 \tag{1}$$

où C_j est le nombre de points 3D vus dans l'image $\mathtt{I}_j$, $\pi\left(\cdot\right)$ est la fonction de projection, $\mathtt{K}$ est la matrice de calibration linéaire de la forme $\begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \end{bmatrix}$ et $\mathbf{p}_{j,\mathrm{p2DId}(c)}$ est un point 2D (correspondant à la reprojection du point 3D $\mathbf{u}_{\mathrm{p3DId}(c)}^{w}$) dans l'image j.

2 Calcul des matrices jacobiennes

Afin d'implémenter un algorithme de Levenberg-Marquardt, il est nécessaire de connaître l'expression de la dérivée de $\mathtt{K}\pi\left(\mathtt{R}_{wj}^{\top}\left(\mathbf{u}_i^w - \mathbf{t}_{wj}\right)\right)$ par rapport aux paramètres $\{\mathtt{R}_{wj},\mathbf{t}_{wj}\}_{j=1,M}$ et $\{\mathbf{u}_i^w\}_{i=1\ldots N}$. Utilisons les notations suivantes pour définir les incréments estimés à chaque itération du Levenberg-Marquardt : $\mathtt{R}_{wj}^{(l+1)} = \mathtt{R}_{wj}^{(l)}\mathrm{expm}\left(\left[\boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{wj}}\right]^{\wedge}\right)$, $\mathbf{t}_{wj}^{(l+1)} = \mathbf{t}_{wj}^{(l)} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{t}_{wj}}$ et $\mathbf{u}_i^{w,(l+1)} = \mathbf{u}_i^{w,(l)} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_i^w}$.

Remarque : Une matrice de rotation n'étant pas un élément d'un espace euclidien mais d'un groupe de Lie, l'incrément $\boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{wj}}$ ne peut pas être additif et doit être adapté à la géométrie de ce groupe de Lie. Ainsi $\boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{wj}}$ est un vecteur de taille 3 (car une matrice de rotation a 3 degrés de liberté) et se convertit en une matrice de rotation grâce à la fonction exponentielle de matrice.

La linéarisation de l'erreur de reprojection s'écrit alors (en omettant les indices l et $l+1$) :

$$\mathbf{p}_{j,i} - \mathtt{K}\pi\left(\left(\mathtt{R}_{wj}\mathrm{expm}\left(\left[\boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{wj}}\right]^{\wedge}\right)\right)^{\top}\left(\mathbf{u}_i^w + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_i^w} - \mathbf{t}_{wj} - \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{t}_{wj}}\right)\right) \approx \mathbf{r}_{j,i} - \mathtt{J}_{j,i}\boldsymbol{\delta} \tag{2}$$

où nous avons utilisé les notations suivantes :

$$\mathbf{r}_{j,i} = \mathbf{p}_{j,i} - \mathtt{K}\pi\left(\mathtt{R}_{wj}^\top\left(\mathbf{u}_i^w - \mathbf{t}_{wj}\right)\right), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} \boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{w1}} & \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{t}_{w1}} & \boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{w2}} & \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{t}_{w2}} & \cdots & \boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{wM}} & \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{t}_{wM}} & \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_1^w} & \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_2^w} & \cdots & \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_N^w} \end{array}\right]^\top$$

$$\mathtt{J}_{j,i} = \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} \mathtt{J}_\pi \left[\begin{array}{cccccccccccc} \mathtt{J}_{\mathtt{R}_{w1}} & \mathtt{J}_{\mathbf{t}_{w1}} & \mathtt{J}_{\mathtt{R}_{w2}} & \mathtt{J}_{\mathbf{t}_{w2}} & \cdots & \mathtt{J}_{\mathtt{R}_{wM}} & \mathtt{J}_{\mathbf{t}_{wM}} & \mathtt{J}_{\mathbf{u}_1^w} & \mathtt{J}_{\mathbf{u}_2^w} & \cdots & \mathtt{J}_{\mathbf{u}_N^w} \end{array}\right], \tag{4}$$

$$\mathtt{J}_\pi = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_i^j}} \pi\left(\mathbf{u}_i^j + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_i^j}\right)\Big|_{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_i^j} = \mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{u}_i^j(z)} & 0 & -\frac{\mathbf{u}_i^j(x)}{\mathbf{u}_i^j(z)^2} \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{u}_i^j(z)} & -\frac{\mathbf{u}_i^j(y)}{\mathbf{u}_i^j(z)^2} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathtt{J}_{\mathtt{R}_{wk}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{wk}}} \left(\mathtt{R}_{wj} \mathrm{expm}\left(\left[\boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{wj}}\right]^\wedge\right)\right)^\top \left(\mathbf{u}_i^w - \mathbf{t}_{wj}\right)\Big|_{\boldsymbol{\delta}_{\mathtt{R}_{wk}} = \mathbf{0}} \\ &= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } k \neq j \\ \begin{bmatrix} \mathtt{G}_x^\top \mathbf{u}_i^j & \mathtt{G}_y^\top \mathbf{u}_i^j & \mathtt{G}_z^\top \mathbf{u}_i^j \end{bmatrix} & \text{si } k = j \end{cases}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\mathtt{G}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathtt{G}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathtt{G}_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathtt{J}_{\mathbf{t}_{wk}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{t}_{wk}}} \mathtt{R}_{wj}^\top \left(\mathbf{u}_i^w - \mathbf{t}_{wj} - \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{t}_{wj}}\right)\Big|_{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{t}_{wk}} = \mathbf{0}} \\ &= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } k \neq j \\ -\mathtt{R}_{wj}^\top & \text{si } k = j \end{cases}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathtt{J}_{\mathbf{u}_k^w} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_k^w}} \mathtt{R}_{wj}^\top \left(\mathbf{u}_i^w + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}_i^w} - \mathbf{t}_{wj}\right)\Big|_{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{t}_{wk}} = \mathbf{0}} \\ &= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } k \neq i \\ \mathtt{R}_{wj}^\top & \text{si } k = i \end{cases}. \end{aligned} \tag{9}$$