

Introduction aux réseaux de neurones pour l'apprentissage supervisé (suite)

Guillaume Bourmaud

PLAN

I. Introduction

II. Apprentissage supervisé

III. Approches paramétriques

IV. Réseaux de neurones

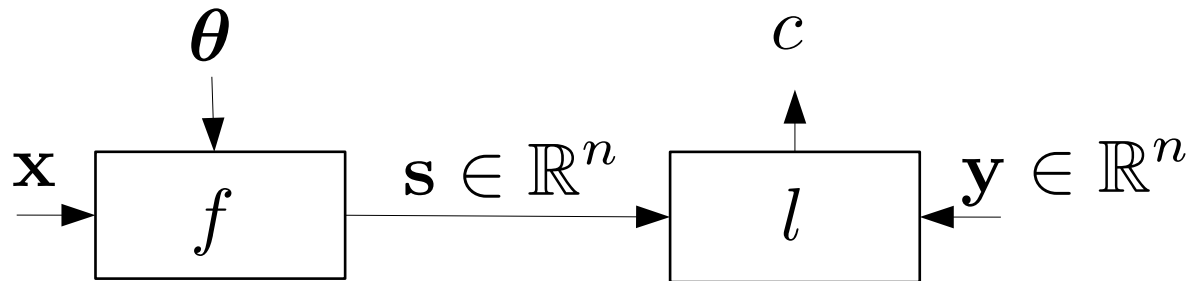
V. Enjeux

VI. Apprentissage des paramètres d'un réseau de neurones

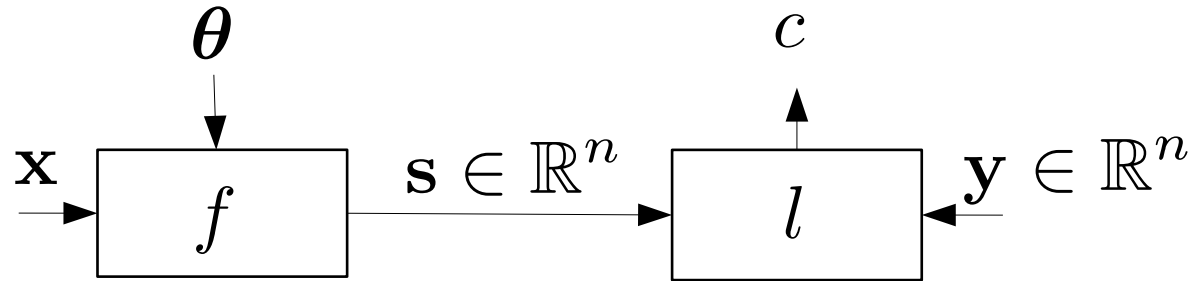
VI) Apprentissage des paramètres d'un réseau de neurones

VI)

Choix du coût $l(\mathbf{y}, \mathbf{s})$: Régression

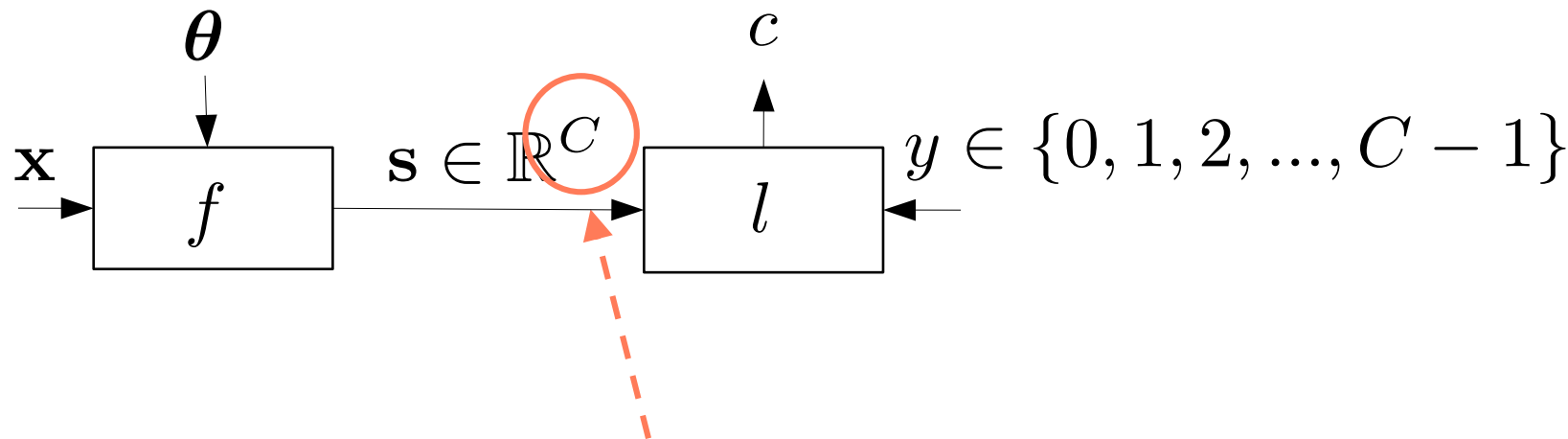


Choix du coût $l(\mathbf{y}, \mathbf{s})$: Régression



- Erreur quadratique $\| \mathbf{y} - \mathbf{s} \|_2^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{s}_i)^2$
- Somme des valeurs absolues $\| \mathbf{y} - \mathbf{s} \|_1 = \sum_{i=0}^{n-1} |\mathbf{y}_i - \mathbf{s}_i|$

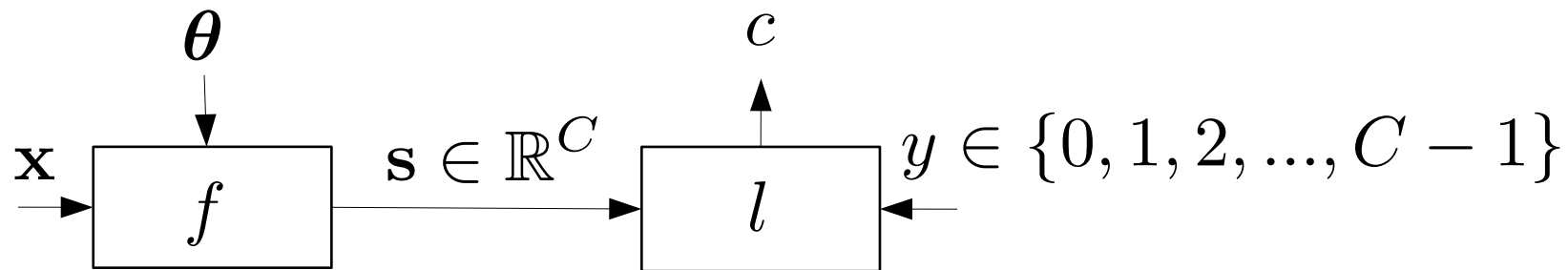
Choix du coût $l(y, s)$: Classification



On prédit un score par classe !

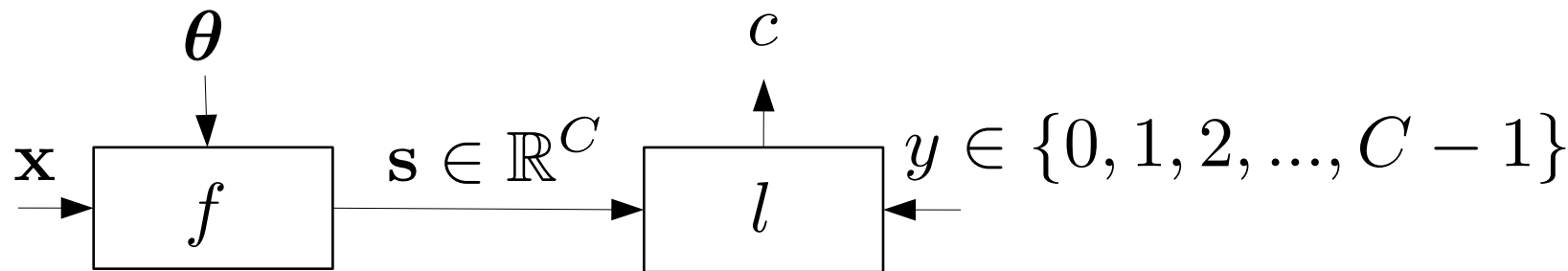
VI)

Choix du coût $l(y, \mathbf{s})$: Classification



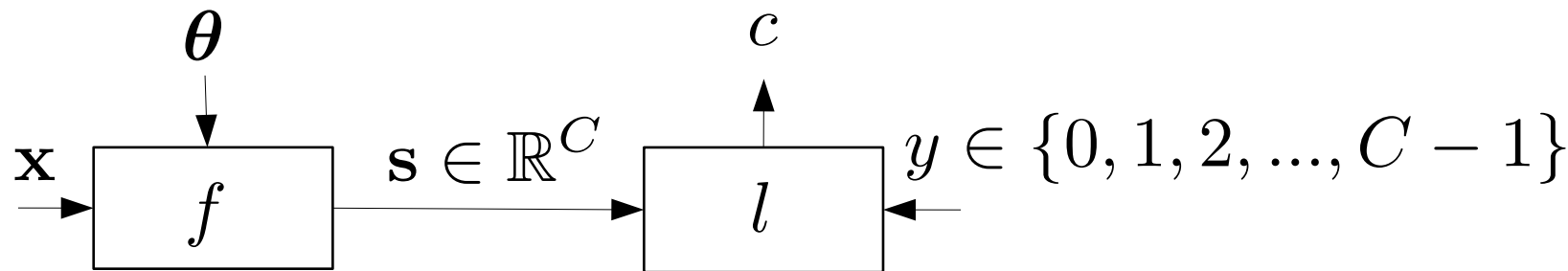
« Cross-entropy »

Choix du coût $l(y, \mathbf{s})$: Classification

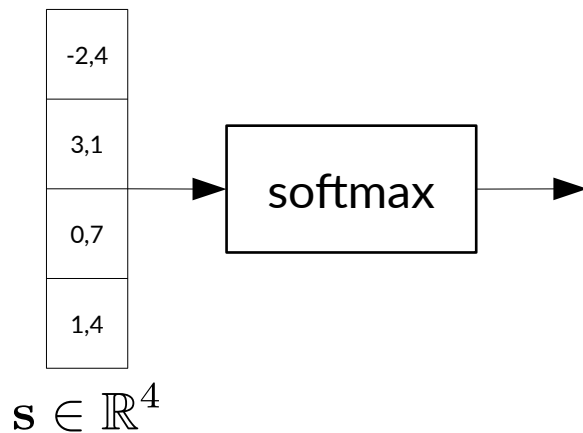


« Cross-entropy » $\text{CE}(\mathbf{s}, y) = -\ln(\mathbf{p}_y)$ où $\mathbf{p}_i = \underbrace{\frac{\exp(\mathbf{s}_i)}{\sum_{c=0}^{C-1} \exp(\mathbf{s}_c)}}_{\text{« softmax »}}$

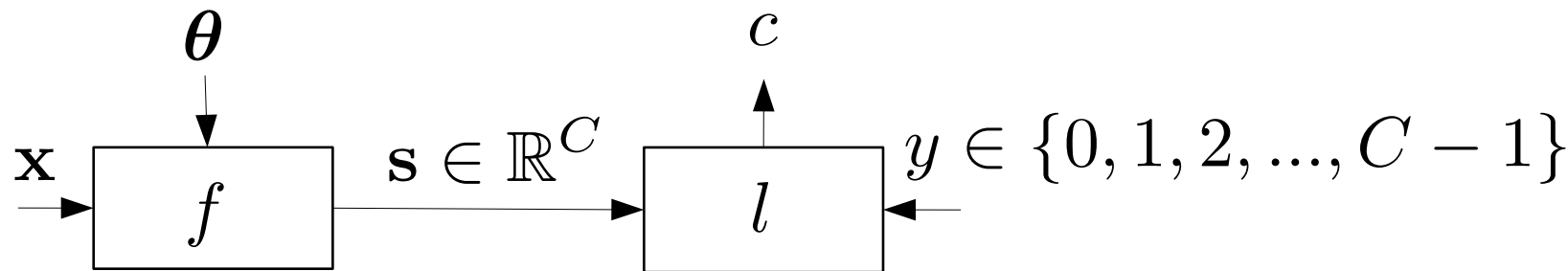
Choix du coût $l(y, \mathbf{s})$: Classification



« Cross-entropy » $\text{CE}(\mathbf{s}, y) = -\ln(\mathbf{p}_y)$ où $\mathbf{p}_i = \underbrace{\frac{\exp(\mathbf{s}_i)}{\sum_{c=0}^{C-1} \exp(\mathbf{s}_c)}}_{\text{« softmax »}}$

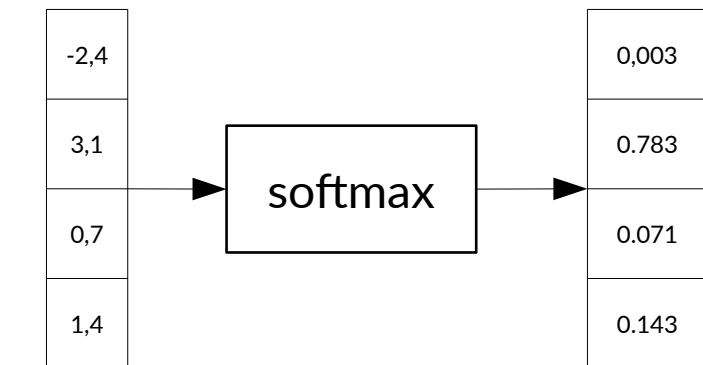


Choix du coût $l(y, s)$: Classification



« Cross-entropy » $\text{CE}(\mathbf{s}, y) = -\ln(\mathbf{p}_y)$ où $\mathbf{p}_i = \frac{\exp(\mathbf{s}_i)}{\sum_{c=0}^{C-1} \exp(\mathbf{s}_c)}$

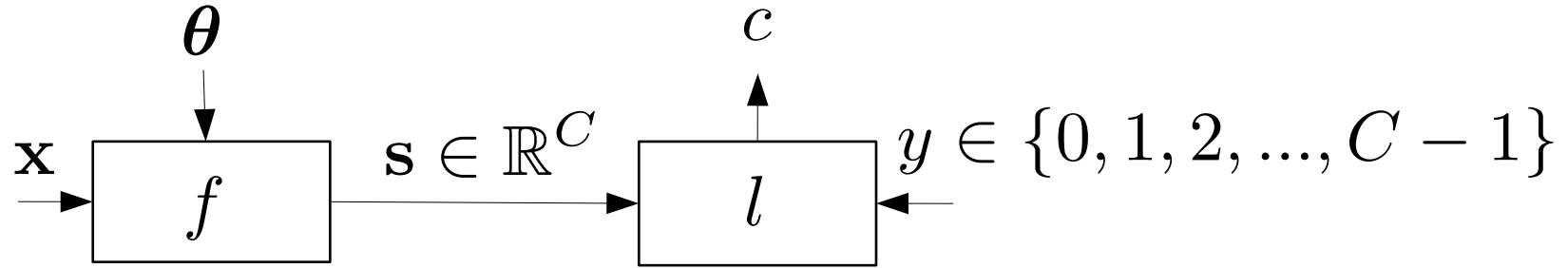
« softmax »



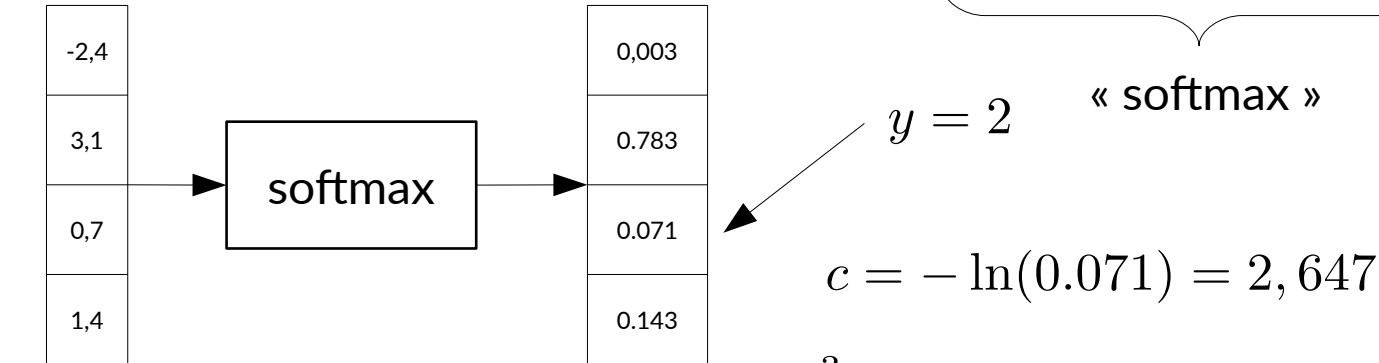
$\mathbf{s} \in \mathbb{R}^4$

$\mathbf{p} \in \Delta^3 : \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i = 1 \text{ et } \mathbf{p}_i \geq 0 \text{ pour } i = 0, \dots, 3$ 11

Choix du coût $l(y, s)$: Classification

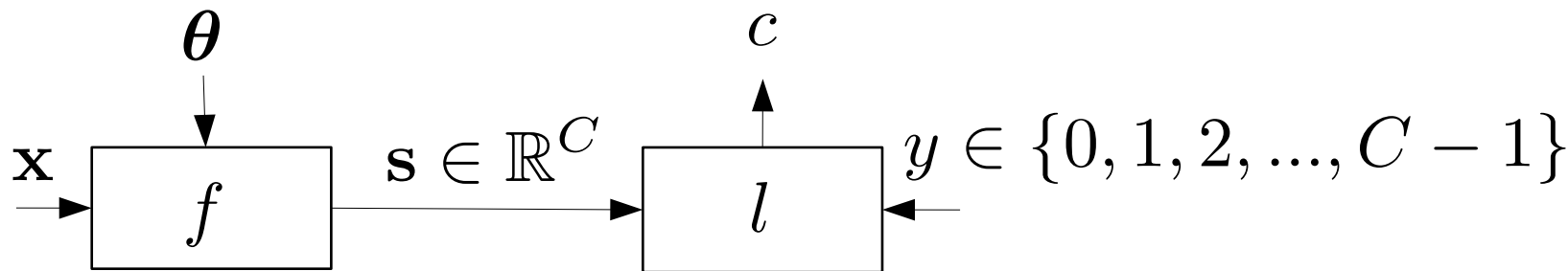


« Cross-entropy » $\text{CE}(\mathbf{s}, y) = -\ln(\mathbf{p}_y)$ où $\mathbf{p}_i = \frac{\exp(\mathbf{s}_i)}{\sum_{c=0}^{C-1} \exp(\mathbf{s}_c)}$

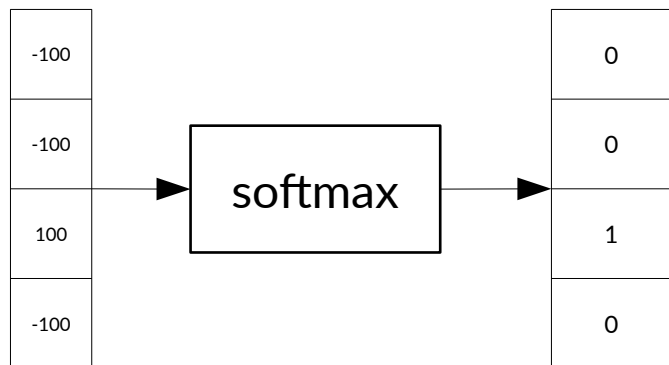


$\mathbf{p} \in \Delta^3 : \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i = 1$ et $\mathbf{p}_i \geq 0$ pour $i = 0, \dots, 3$ 12

Choix du coût $l(y, s)$: Classification



« Cross-entropy » $\text{CE}(\mathbf{s}, y) = -\ln(\mathbf{p}_y)$ où $\mathbf{p}_i = \frac{\exp(\mathbf{s}_i)}{\sum_{c=0}^{C-1} \exp(\mathbf{s}_c)}$



$y = 2$

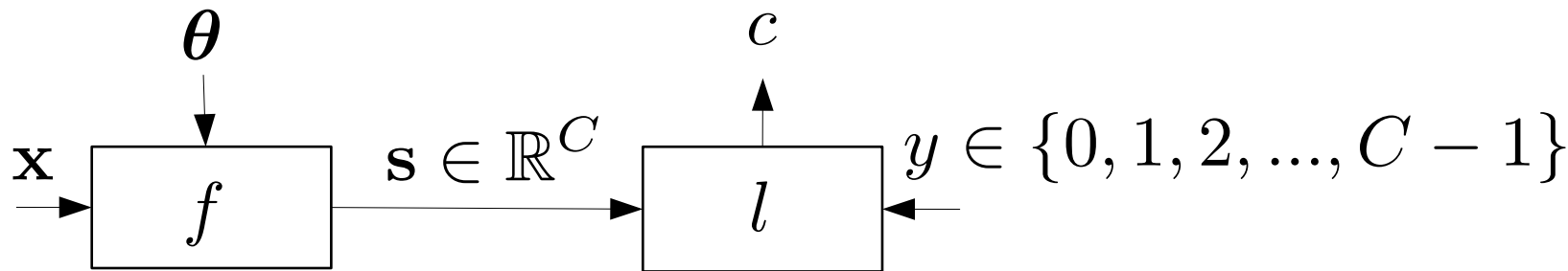
« softmax »

$c = -\ln(1) = 0$

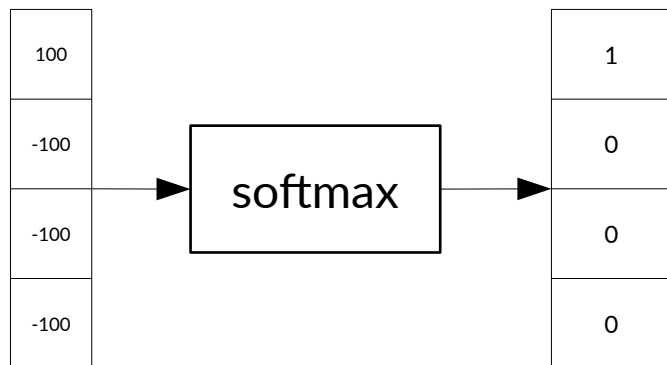
$\mathbf{p} \in \Delta^3 : \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i = 1$ et $\mathbf{p}_i \geq 0$ pour $i = 0, \dots, 3$

Exemple : prédiction « parfaite »

Choix du coût $l(y, s)$: Classification



« Cross-entropy » $\text{CE}(\mathbf{s}, y) = -\ln(\mathbf{p}_y)$ où $\mathbf{p}_i = \frac{\exp(\mathbf{s}_i)}{\sum_{c=0}^{C-1} \exp(\mathbf{s}_c)}$



$y = 2$

« softmax »

$c = -\ln(0) = +\infty$

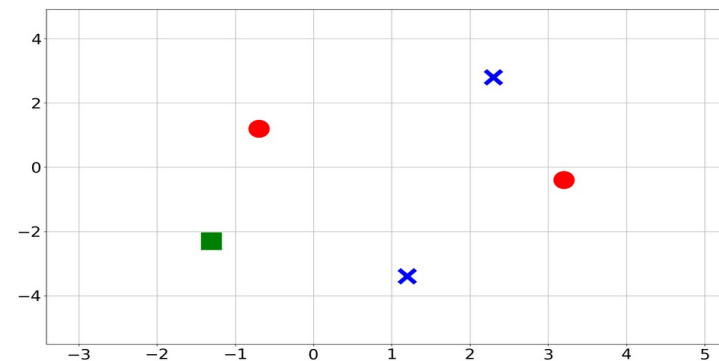
$\mathbf{p} \in \Delta^3 : \sum_{i=0}^3 \mathbf{p}_i = 1$ et $\mathbf{p}_i \geq 0$ pour $i = 0, \dots, 3$

Exemple : prédiction «très mauvaise»

VI)

Exemple de classification : 5 données, $X \in \mathbb{R}^2$ et $Y \in \{0, 1, 2\}$

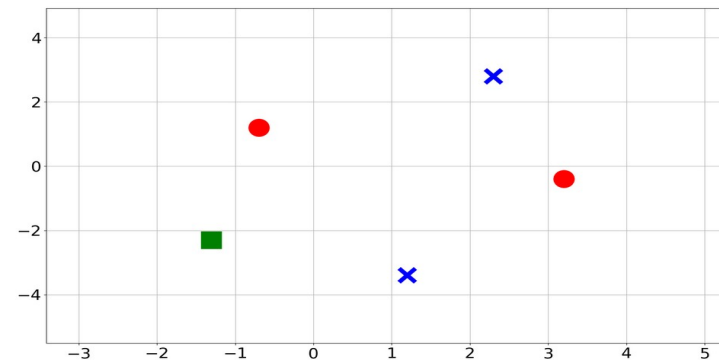
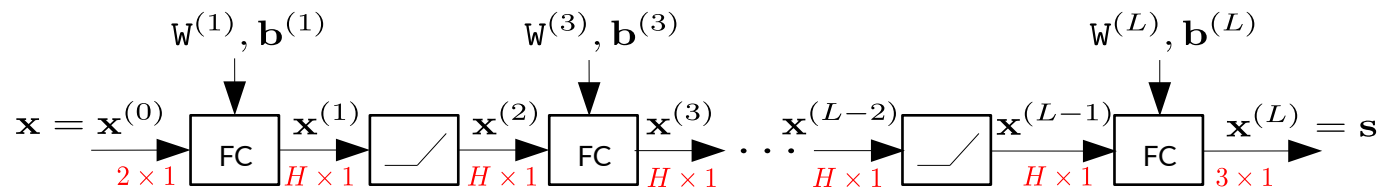
$$\begin{array}{lllll} X_{\text{train},1} = [1.2, -3.4] & X_{\text{train},2} = [2.3, 2.8] & X_{\text{train},3} = [-0.7, 1.2] & X_{\text{train},4} = [3.2, -0.4] & X_{\text{train},5} = [-1.3, -2.3] \\ Y_{\text{train},1} = 0 & Y_{\text{train},2} = 0 & Y_{\text{train},3} = 1 & Y_{\text{train},4} = 1 & Y_{\text{train},5} = 2 \end{array}$$



Exemple de classification : 5 données, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{Y} \in \{0, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{x}_{\text{train},1} = [1.2, -3.4] & \mathbf{x}_{\text{train},2} = [2.3, 2.8] & \mathbf{x}_{\text{train},3} = [-0.7, 1.2] & \mathbf{x}_{\text{train},4} = [3.2, -0.4] & \mathbf{x}_{\text{train},5} = [-1.3, -2.3] \\ \mathbf{y}_{\text{train},1} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},2} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},3} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},4} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},5} = 2 \end{array}$$

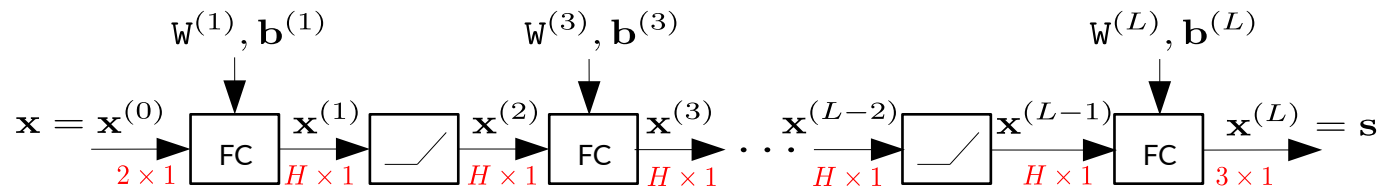
Choix de la fonction



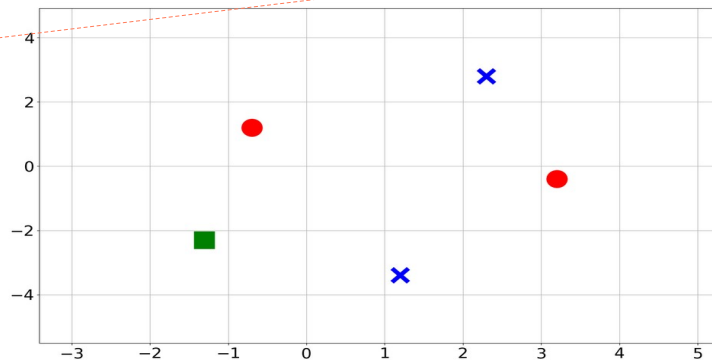
Exemple de classification : 5 données, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{Y} \in \{0, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{x}_{\text{train},1} = [1.2, -3.4] & \mathbf{x}_{\text{train},2} = [2.3, 2.8] & \mathbf{x}_{\text{train},3} = [-0.7, 1.2] & \mathbf{x}_{\text{train},4} = [3.2, -0.4] & \mathbf{x}_{\text{train},5} = [-1.3, -2.3] \\ \mathbf{y}_{\text{train},1} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},2} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},3} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},4} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},5} = 2 \end{array}$$

Choix de la fonction



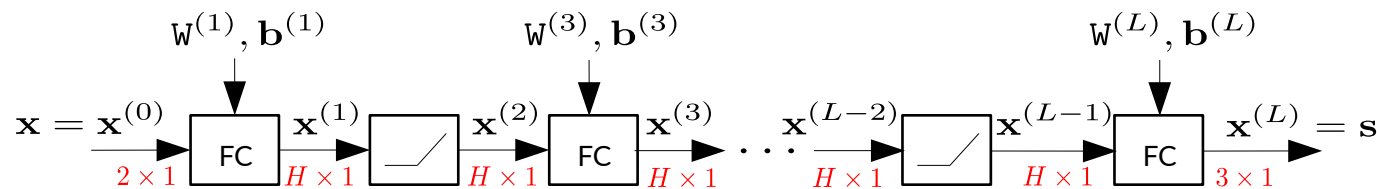
Problème : on souhaite prédire une valeur discrète, mais la sortie du MLP est continue.



Exemple de classification : 5 données, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{Y} \in \{0, 1, 2\}$

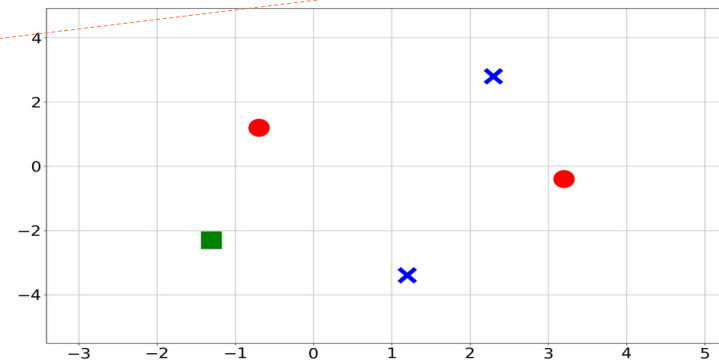
$$\begin{array}{lllll} \mathbf{x}_{\text{train},1} = [1.2, -3.4] & \mathbf{x}_{\text{train},2} = [2.3, 2.8] & \mathbf{x}_{\text{train},3} = [-0.7, 1.2] & \mathbf{x}_{\text{train},4} = [3.2, -0.4] & \mathbf{x}_{\text{train},5} = [-1.3, -2.3] \\ \mathbf{y}_{\text{train},1} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},2} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},3} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},4} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},5} = 2 \end{array}$$

Choix de la fonction



Problème : on souhaite prédire une valeur discrète, mais la sortie du MLP est continue.

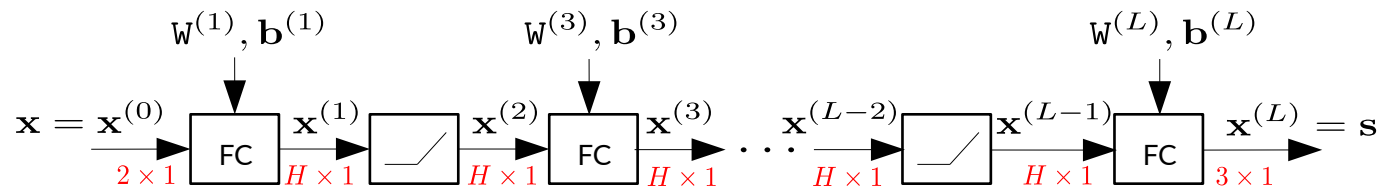
Solution : on prédit un score par classe, et la classe prédite sera celle du score maximum.



Exemple de classification : 5 données, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{Y} \in \{0, 1, 2\}$

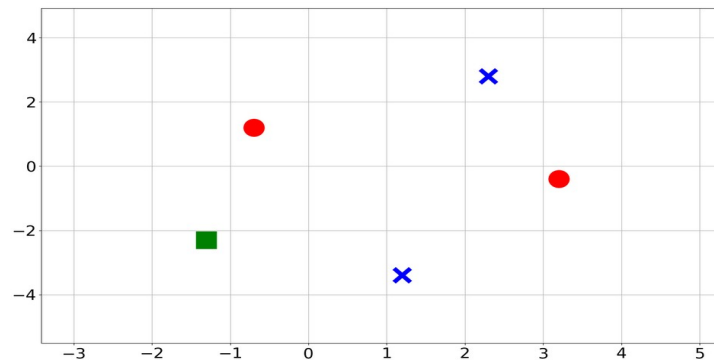
$$\begin{array}{lllll} \mathbf{x}_{\text{train},1} = [1.2, -3.4] & \mathbf{x}_{\text{train},2} = [2.3, 2.8] & \mathbf{x}_{\text{train},3} = [-0.7, 1.2] & \mathbf{x}_{\text{train},4} = [3.2, -0.4] & \mathbf{x}_{\text{train},5} = [-1.3, -2.3] \\ \mathbf{y}_{\text{train},1} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},2} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},3} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},4} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},5} = 2 \end{array}$$

Choix de la fonction



$$f(x; \theta) = \text{MLP} \left(x; \theta = \{\mathbf{W}^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)}\}_l \right)$$

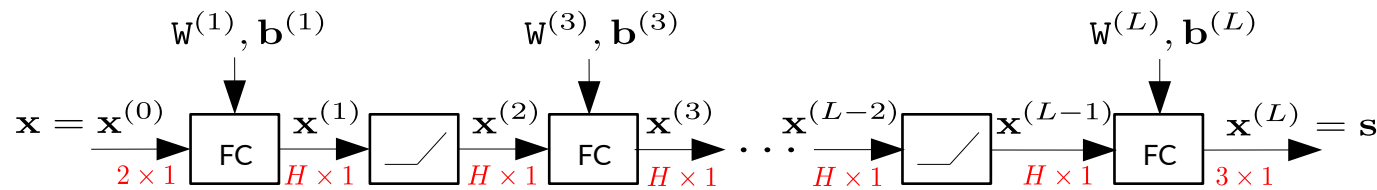
hyper-paramètres : L, H



Exemple de classification : 5 données, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{Y} \in \{0, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{x}_{\text{train},1} = [1.2, -3.4] & \mathbf{x}_{\text{train},2} = [2.3, 2.8] & \mathbf{x}_{\text{train},3} = [-0.7, 1.2] & \mathbf{x}_{\text{train},4} = [3.2, -0.4] & \mathbf{x}_{\text{train},5} = [-1.3, -2.3] \\ \mathbf{y}_{\text{train},1} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},2} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},3} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},4} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},5} = 2 \end{array}$$

Choix de la fonction



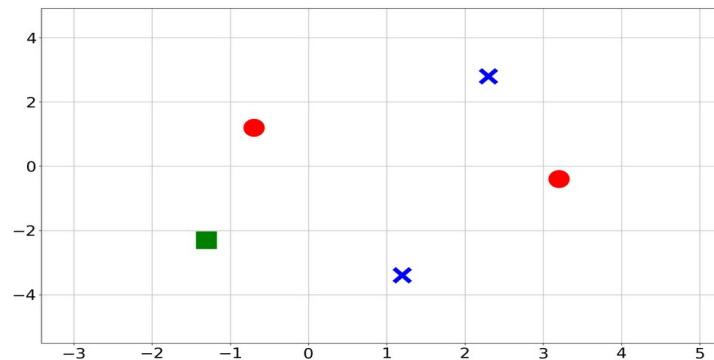
$$f(x; \theta) = \text{MLP} \left(x; \theta = \{W^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)}\}_l \right)$$

hyper-paramètres : L, H

Apprentissage

Choix du coût $l(y, \mathbf{s}) = -\ln(\text{softmax}(\mathbf{s})[y])$

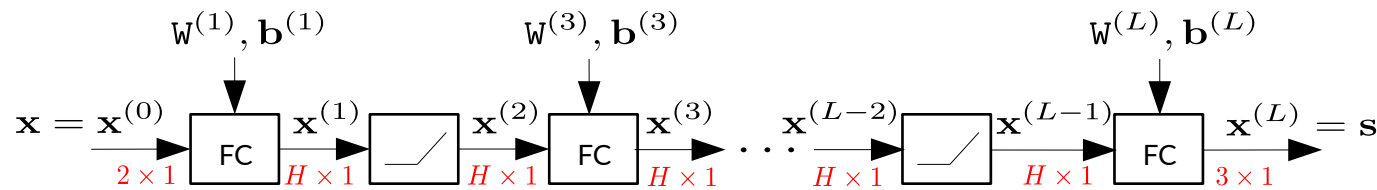
« Cross-entropy »



Exemple de classification : 5 données, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{Y} \in \{0, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{x}_{\text{train},1} = [1.2, -3.4] & \mathbf{x}_{\text{train},2} = [2.3, 2.8] & \mathbf{x}_{\text{train},3} = [-0.7, 1.2] & \mathbf{x}_{\text{train},4} = [3.2, -0.4] & \mathbf{x}_{\text{train},5} = [-1.3, -2.3] \\ \mathbf{y}_{\text{train},1} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},2} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},3} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},4} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},5} = 2 \end{array}$$

Choix de la fonction



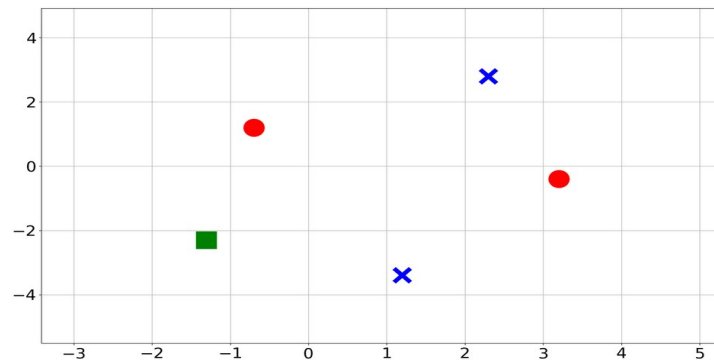
$$f(x; \theta) = \text{MLP} \left(x; \theta = \{ \mathbf{W}^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)} \}_l \right)$$

hyper-paramètres : L, H

Apprentissage

Choix du coût $l(y, \mathbf{s}) = -\ln(\text{softmax}(\mathbf{s})[y])$

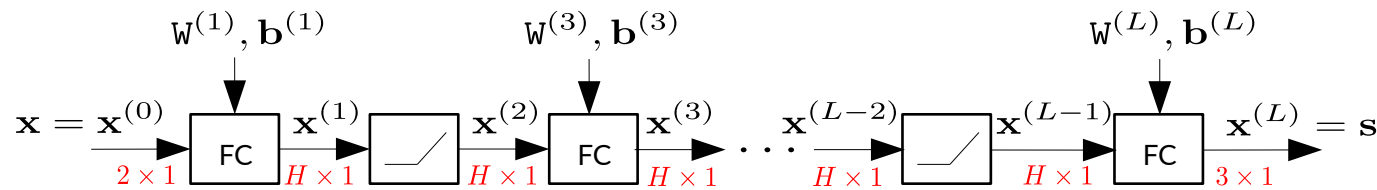
Optimisation $\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^5 -\ln(\text{softmax}(\text{MLP}(\mathbf{x}_{\text{train},i}; \theta))[\mathbf{y}_{\text{train},i}])$



Exemple de classification : 5 données, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{Y} \in \{0, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{x}_{\text{train},1} = [1.2, -3.4] & \mathbf{x}_{\text{train},2} = [2.3, 2.8] & \mathbf{x}_{\text{train},3} = [-0.7, 1.2] & \mathbf{x}_{\text{train},4} = [3.2, -0.4] & \mathbf{x}_{\text{train},5} = [-1.3, -2.3] \\ \mathbf{y}_{\text{train},1} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},2} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},3} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},4} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},5} = 2 \end{array}$$

Choix de la fonction



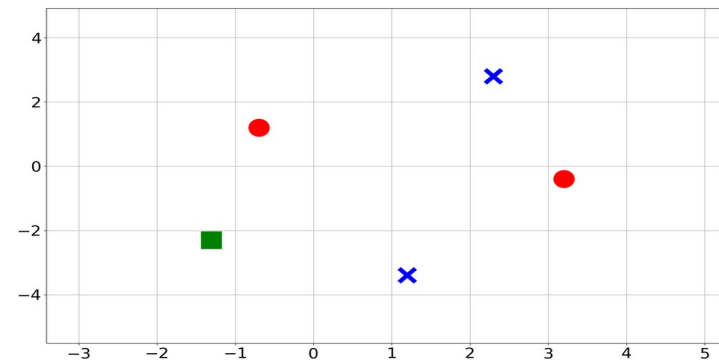
$$f(x; \theta) = \text{MLP} \left(x; \theta = \{W^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)}\}_l \right)$$

hyper-paramètres : L, H

Apprentissage

Choix du coût $l(y, \mathbf{s}) = -\ln(\text{softmax}(\mathbf{s})[y])$

Optimisation $\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^5 -\ln(\text{softmax}(\text{MLP}(\mathbf{x}_{\text{train},i}; \theta))[\mathbf{y}_{\text{train},i}])$



Inférence

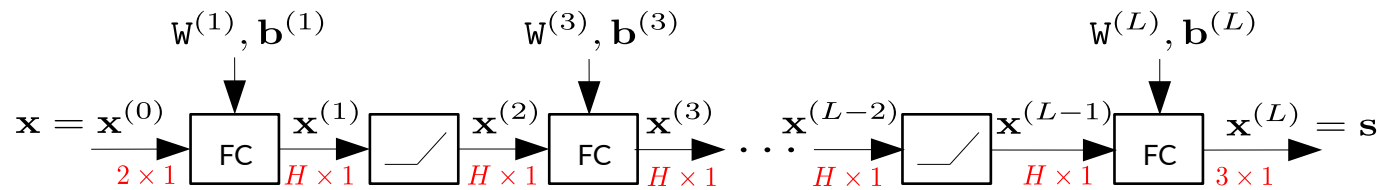
$$\mathbf{s}_{\text{test}} = \text{MLP}(x_{\text{test}}; \theta^*)$$

Classe prédite : $\arg \max \mathbf{s}_{\text{test}}$

Exemple de classification : 5 données, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{Y} \in \{0, 1, 2\}$

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{x}_{\text{train},1} = [1.2, -3.4] & \mathbf{x}_{\text{train},2} = [2.3, 2.8] & \mathbf{x}_{\text{train},3} = [-0.7, 1.2] & \mathbf{x}_{\text{train},4} = [3.2, -0.4] & \mathbf{x}_{\text{train},5} = [-1.3, -2.3] \\ \mathbf{y}_{\text{train},1} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},2} = 0 & \mathbf{y}_{\text{train},3} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},4} = 1 & \mathbf{y}_{\text{train},5} = 2 \end{array}$$

Choix de la fonction



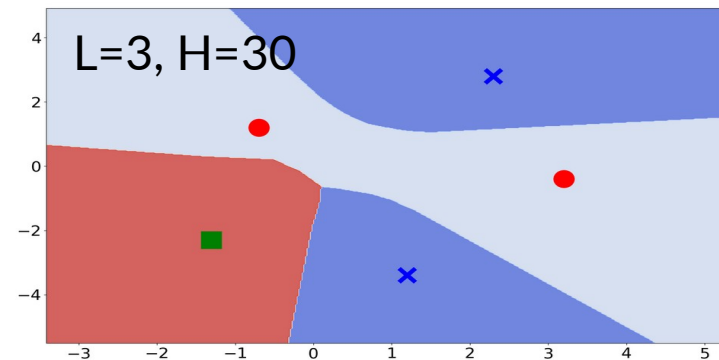
$$f(x; \theta) = \text{MLP} \left(x; \theta = \{W^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)}\}_l \right)$$

hyper-paramètres : L, H

Apprentissage

Choix du coût $l(y, \mathbf{s}) = -\ln(\text{softmax}(\mathbf{s})[y])$

Optimisation $\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^5 -\ln(\text{softmax}(\text{MLP}(\mathbf{x}_{\text{train},i}; \theta))[\mathbf{y}_{\text{train},i}])$

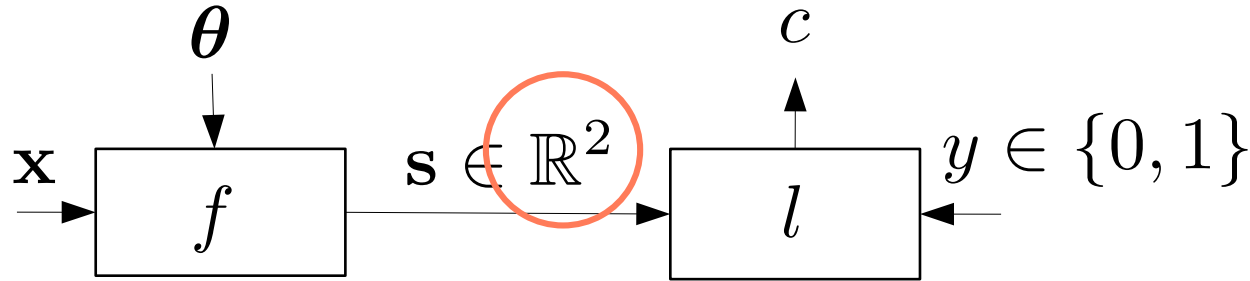


Inférence

$$\mathbf{s}_{\text{test}} = \text{MLP}(x_{\text{test}}; \theta^*)$$

Classe prédite : $\arg \max \mathbf{s}_{\text{test}}$

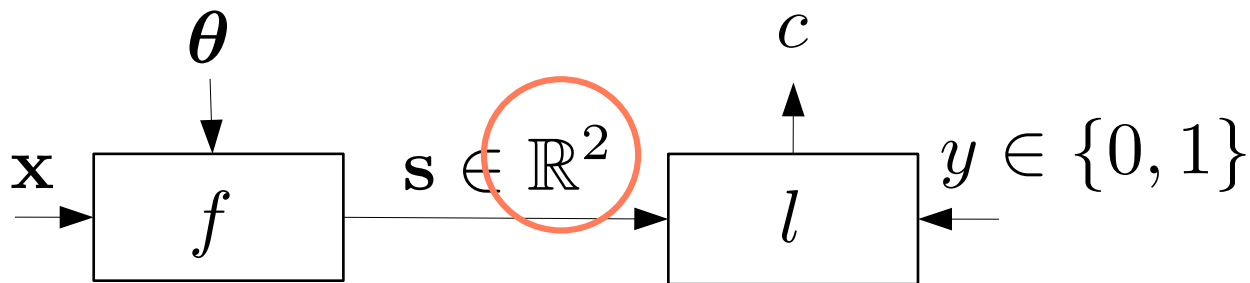
« Cross-entropy » à deux classes vs « Binary cross-entropy »



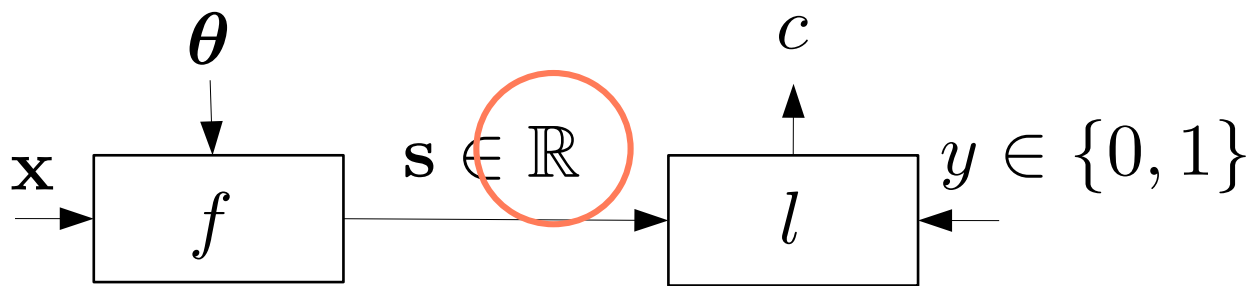
« Cross-entropy » $\text{CE}(\mathbf{s}, y) = -\ln(\mathbf{p}_y)$ où $\mathbf{p}_i = \frac{\exp(\mathbf{s}_i)}{\sum_{c=0}^{C-1} \exp(\mathbf{s}_c)}$

VI)

« Cross-entropy » à deux classes vs « Binary cross-entropy »

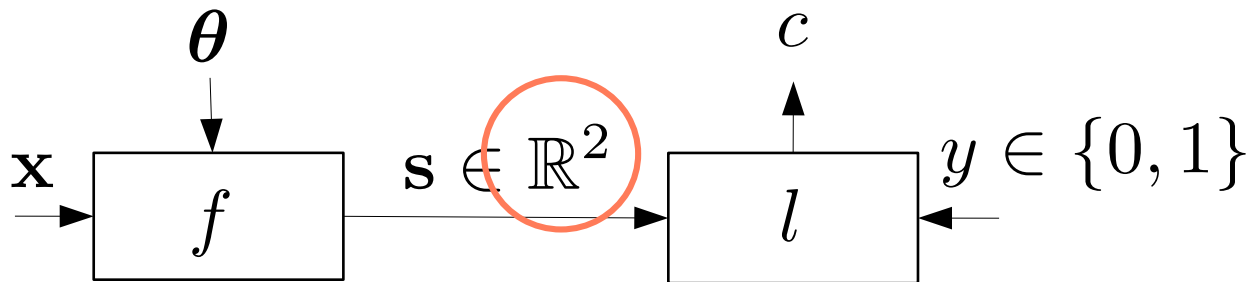


« Cross-entropy » $\text{CE}(\mathbf{s}, y) = -\ln(\mathbf{p}_y)$ où $\mathbf{p}_i = \frac{\exp(\mathbf{s}_i)}{\sum_{c=0}^{C-1} \exp(\mathbf{s}_c)}$

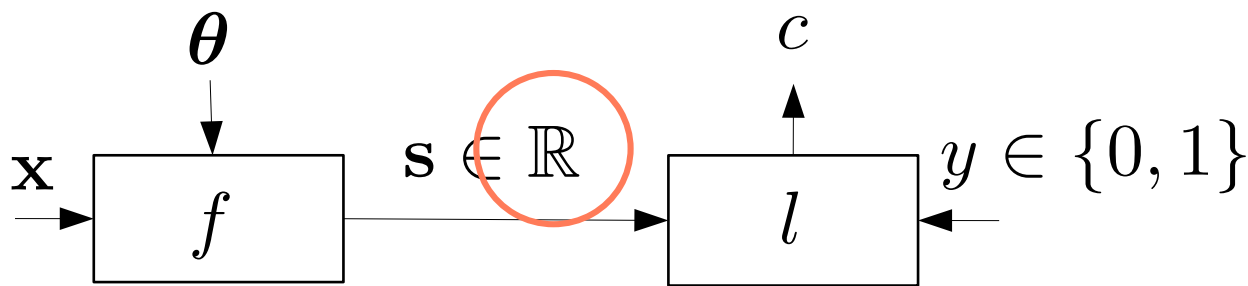


« Binary cross-entropy » $-y\ln(\mathbf{p}) - (1 - y)\ln(1 - \mathbf{p})$ où $\mathbf{p} = \overbrace{\frac{1}{1 + \exp(-s)}}^{\text{« sigmoïde »}}$ ²⁵

« Cross-entropy » à deux classes vs « Binary cross-entropy »



« Cross-entropy » $\text{CE}(\mathbf{s}, y) = -\ln(\mathbf{p}_y)$ où $\mathbf{p}_i = \frac{\exp(\mathbf{s}_i)}{\sum_{c=0}^{C-1} \exp(\mathbf{s}_c)}$

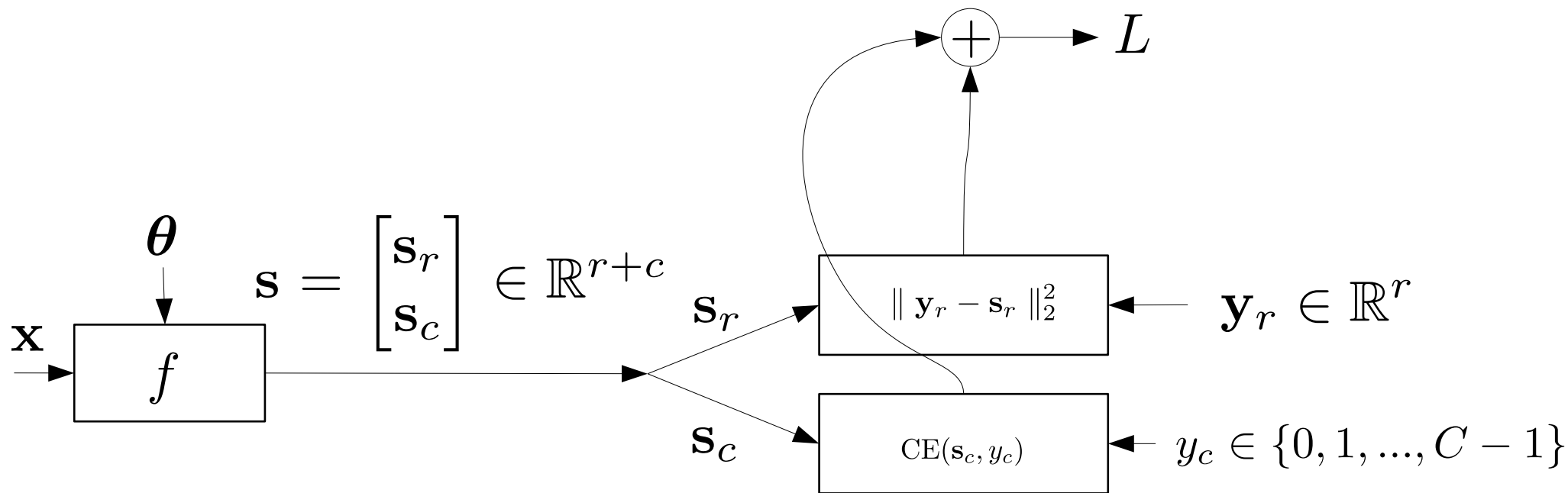


« Binary cross-entropy » $-y\ln(\mathbf{p}) - (1 - y)\ln(1 - \mathbf{p})$ où

Strictement équivalent !
Juste une question
d'implémentation.

« sigmoïde »
 $\mathbf{p} = \frac{1}{1 + \exp(-s)}$ ²⁶

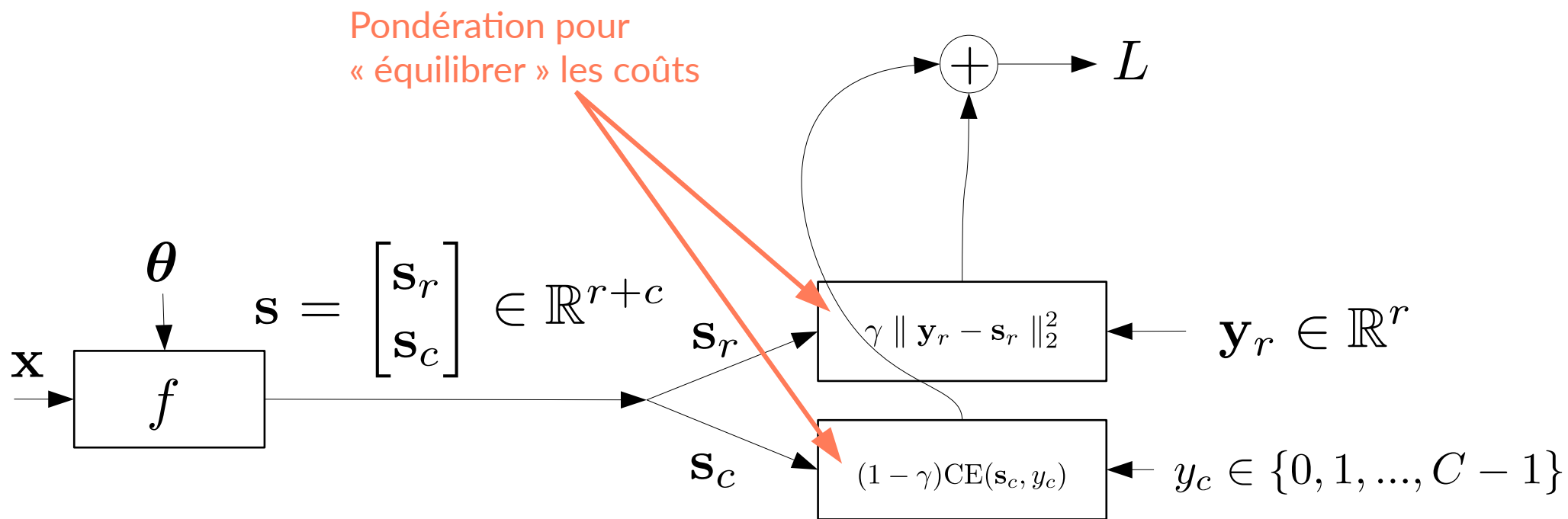
Choix du coût $l(\mathbf{y}, \mathbf{s})$: Combinaison de coûts



Exemple : classification et régression conjointe

Permet à un réseau d'apprendre à réaliser plusieurs tâches.

Choix du coût $l(\mathbf{y}, \mathbf{s})$: Combinaison de coûts



Exemple : classification et régression conjointe

Permet à un réseau d'apprendre à réaliser plusieurs tâches.

Optimisation des paramètres

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^N l(\mathbf{Y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{X}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))$$

où

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = f_L \left(f_{L-1} \left(\dots f_2 \left(f_1 \left(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}^{(1)} \right); \boldsymbol{\theta}^{(2)} \right) \dots; \boldsymbol{\theta}^{(L-1)} \right); \boldsymbol{\theta}^{(L)} \right)$$

Optimisation des paramètres

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^N l(\mathbf{Y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{X}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))$$

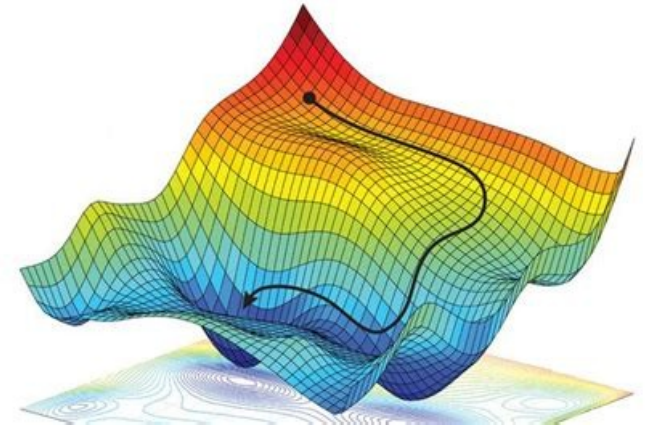
où

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = f_L \left(f_{L-1} \left(\dots f_2 \left(f_1 \left(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}^{(1)} \right); \boldsymbol{\theta}^{(2)} \right) \dots; \boldsymbol{\theta}^{(L-1)} \right); \boldsymbol{\theta}^{(L)} \right)$$

Descente de gradient

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \left. \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_k}$$

Pas d'apprentissage (« learning rate » en anglais)



Calcul du gradient

Objectif

Calculer le gradient de la fonction de coût par rapport aux paramètres du réseau de neurones.

Calcul du gradient

Objectif

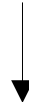
Calculer le gradient de la fonction de coût par rapport aux paramètres du réseau de neurones.

Comment faire ?

Un réseau de neurones est une **composition de fonctions**.



Application du **théorème de dérivation d'une fonction composée** (« **chain rule** »).

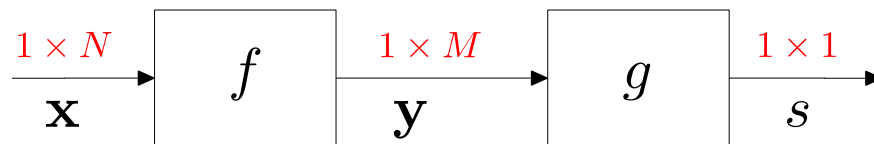


L'implémentation qui en résulte s'appelle la **rétropropagation du gradient** (« **backpropagation** »)

Calcul du gradient

Rappel : Théorème de dérivation des fonctions composées

$$s = g(f(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad s = g(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

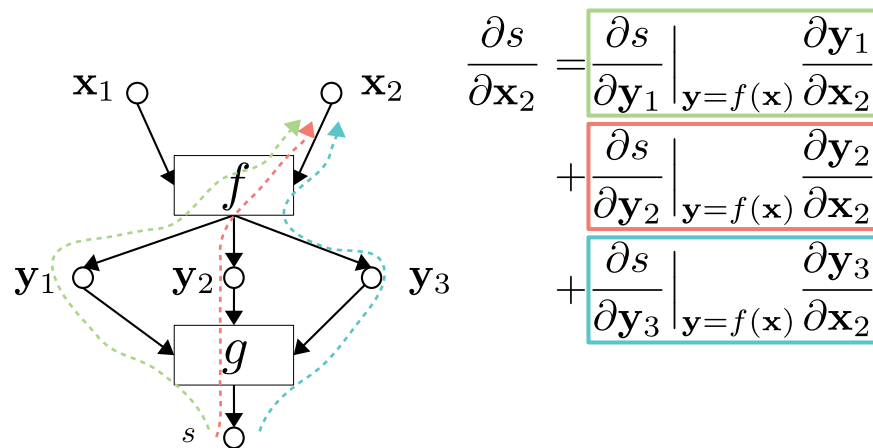
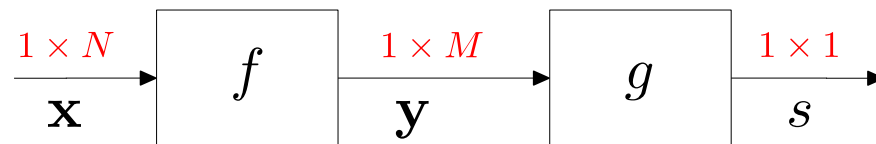


Remarque importante : l'objectif est de dériver le **coût**, c'est-à-dire **un scalaire**.

Calcul du gradient

Rappel : Théorème de dérivation des fonctions composées

$$s = g(f(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad s = g(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$



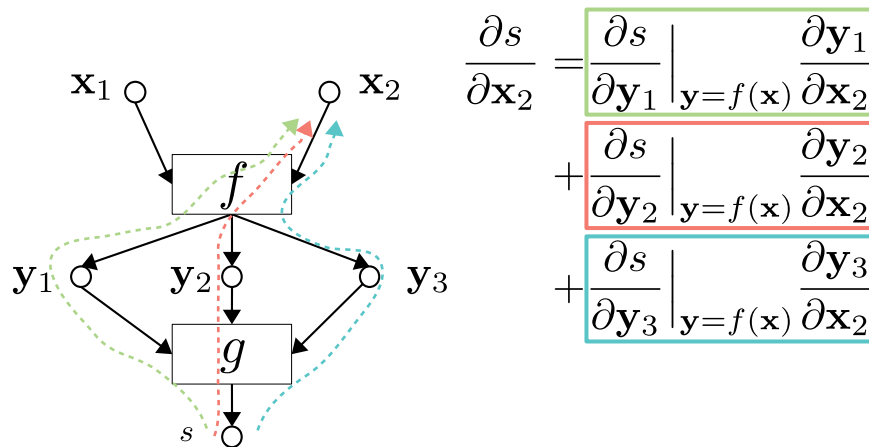
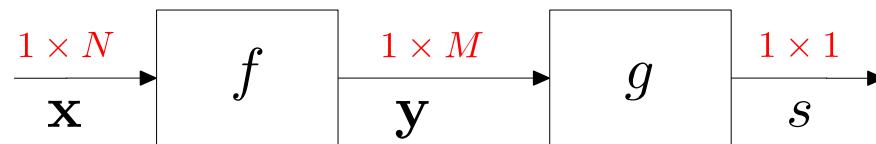
$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x_2} &= \frac{\partial s}{\partial y_1} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ &+ \frac{\partial s}{\partial y_2} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ &+ \frac{\partial s}{\partial y_3} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Exemple

Calcul du gradient

Rappel : Théorème de dérivation des fonctions composées

$$s = g(f(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad s = g(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$



Exemple

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x_2} &= \frac{\partial s}{\partial y_1} \bigg|_{y=f(x)} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ &+ \frac{\partial s}{\partial y_2} \bigg|_{y=f(x)} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ &+ \frac{\partial s}{\partial y_3} \bigg|_{y=f(x)} \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial y_j} \bigg|_{y=f(x)} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Formule : dérivation élément par élément

Calcul du gradient (suite)

Rappel : Théorème de dérivation des fonctions composées

$$s = g(f(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad s = g(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}_3} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_j} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_j} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_j} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_3} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_1} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_2} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}_3} & \dots \\ \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})}}_{\doteq \tilde{f}(\mathbf{x}, \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

Calcul du gradient (suite)

Rappel : Théorème de dérivation des fonctions composées

$$s = g(f(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad s = g(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}_3} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_j} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_j} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_j} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_3} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_1} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_2} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}_3} & \dots \\ \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})}}_{\doteq \tilde{f}(\mathbf{x}, \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} \big|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_1} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_2} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top = \underbrace{1 \cdot \frac{\partial g(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}}_{\doteq \tilde{g}(\mathbf{y}, 1)}$$

Calcul du gradient (suite)

Rappel : Théorème de dérivation des fonctions composées

$$s = g(f(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad s = g(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}_3} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_j} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_j} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \sum_{j=1}^M \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_j} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{y}_j}{\partial \mathbf{x}_3} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_1} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_2} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{y}_1}{\partial \mathbf{x}_3} & \cdots \\ \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}_2} & \frac{\partial \mathbf{y}_2}{\partial \mathbf{x}_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} \bigg|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})}}_{\doteq \tilde{f}(\mathbf{x}, \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} \big|_{\mathbf{y}=f(\mathbf{x})})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_1} \\ \frac{\partial s}{\partial \mathbf{y}_2} \\ \vdots \end{bmatrix}^\top = \underbrace{1 \cdot \frac{\partial g(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}}_{\doteq \tilde{g}(\mathbf{y}, 1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} = \tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{g}(\mathbf{y}, 1))$$

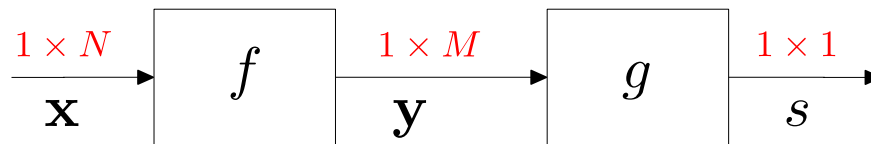
Composition de fonctions

Calcul du gradient (suite)

Rappel : Théorème de dérivation des fonctions composées

$$s = g(f(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad s = g(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} = \tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{g}(\mathbf{y}, 1))$$

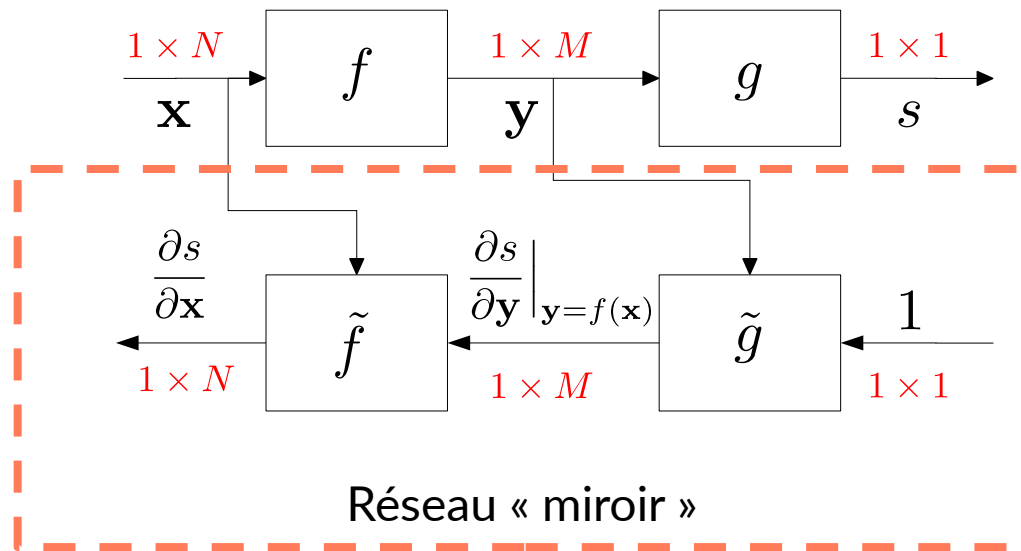


Calcul du gradient (suite)

Rappel : Théorème de dérivation des fonctions composées

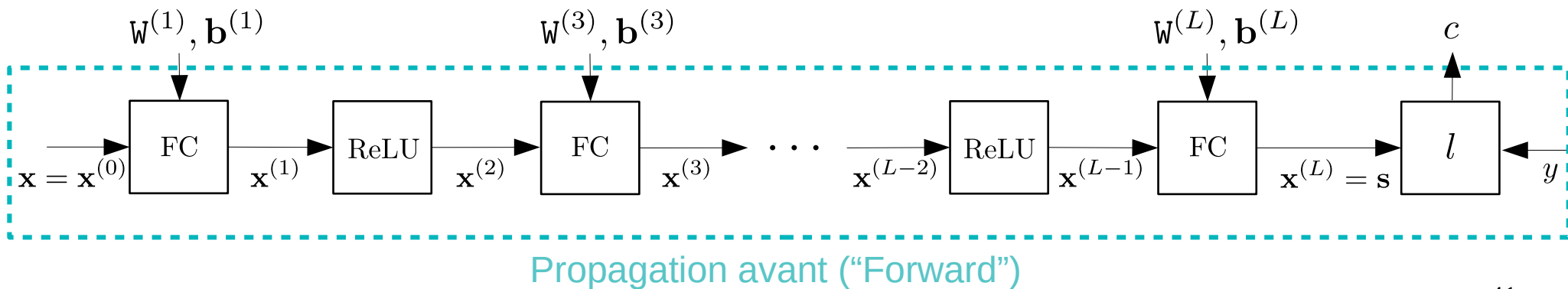
$$s = g(f(\mathbf{x})) \quad \text{avec} \quad s = g(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial s}{\partial \mathbf{x}} = \tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{g}(\mathbf{y}, 1))$$



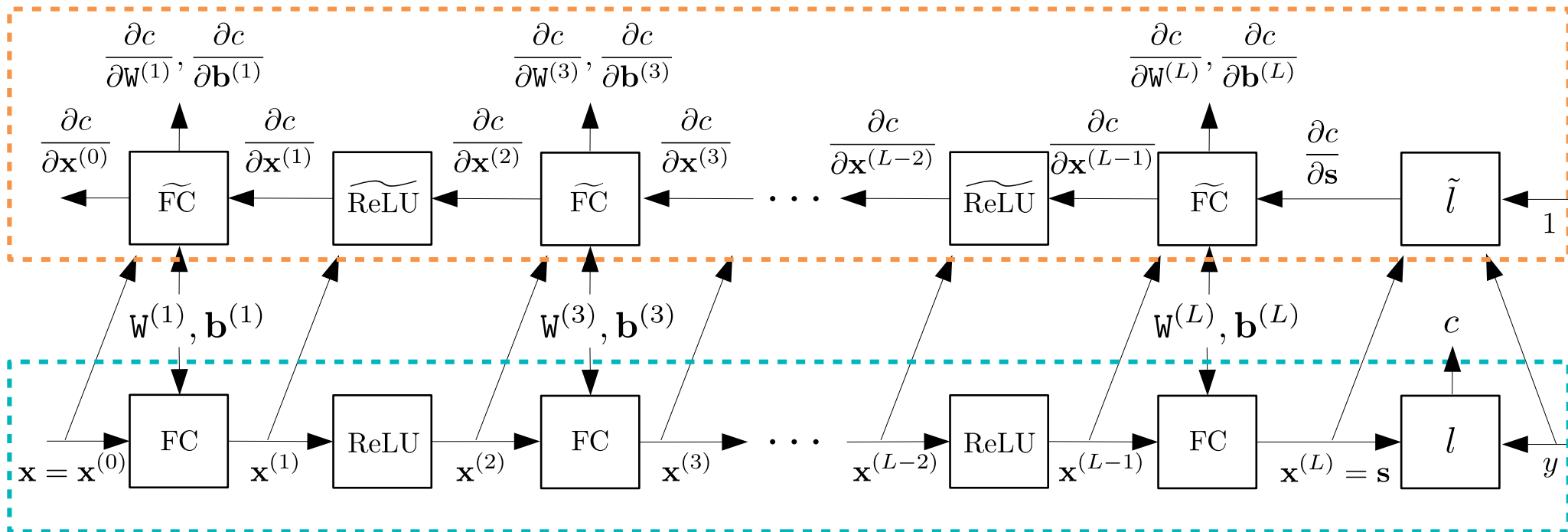
VI)

Calcul automatique du gradient du MLP



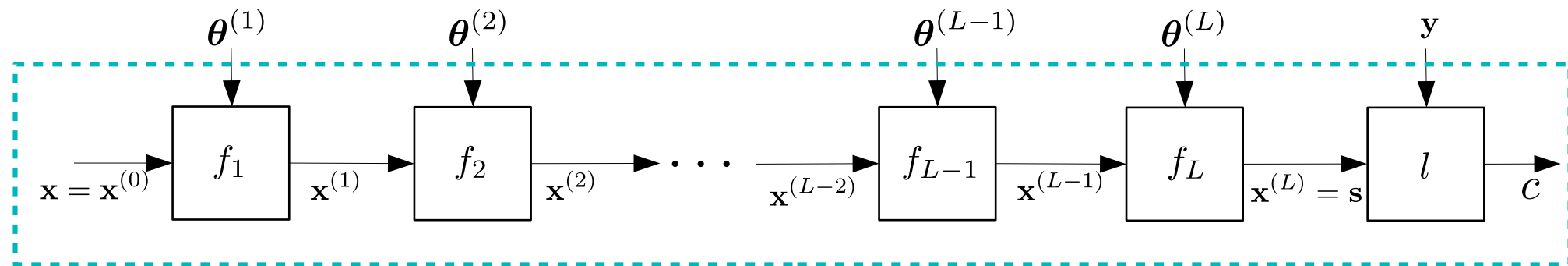
Calcul automatique du gradient du MLP

Rétropropagation ("Backward")



Propagation avant ("Forward")

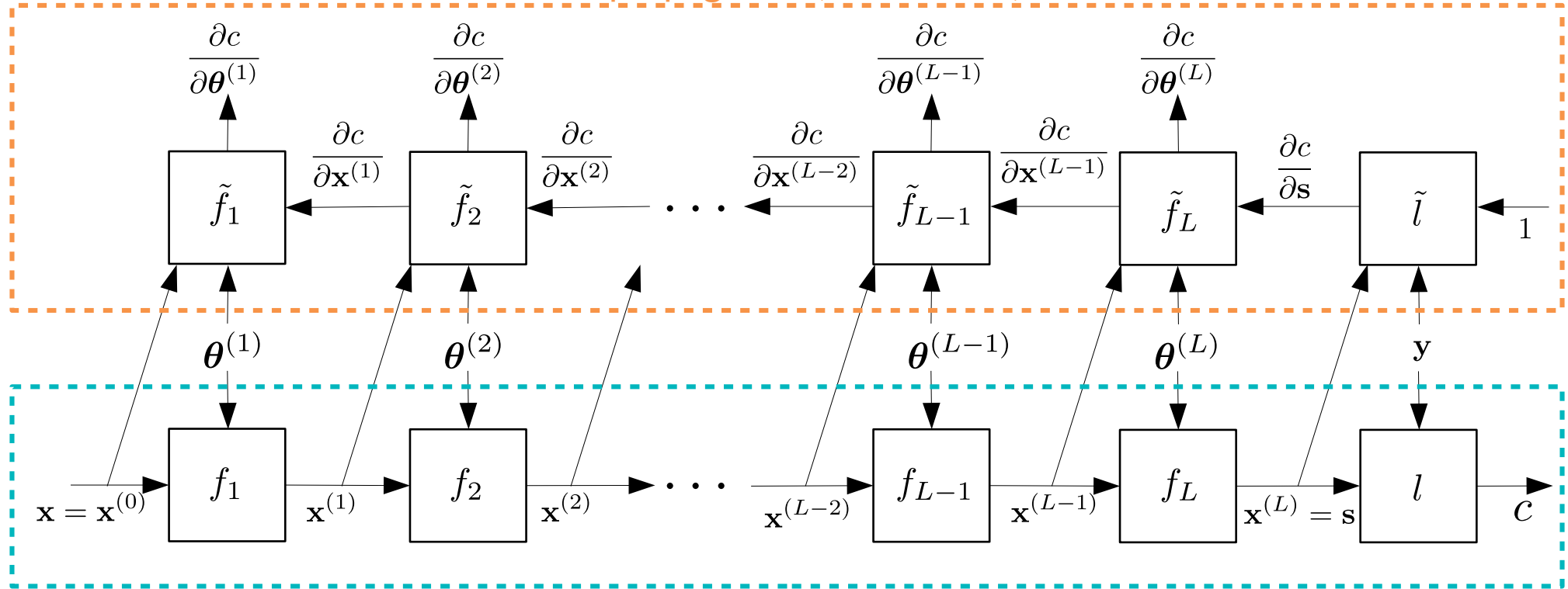
Calcul automatique du gradient



Propagation avant ("Forward")

Calcul automatique du gradient

Rétropropagation ("Backward")



Propagation avant ("Forward")

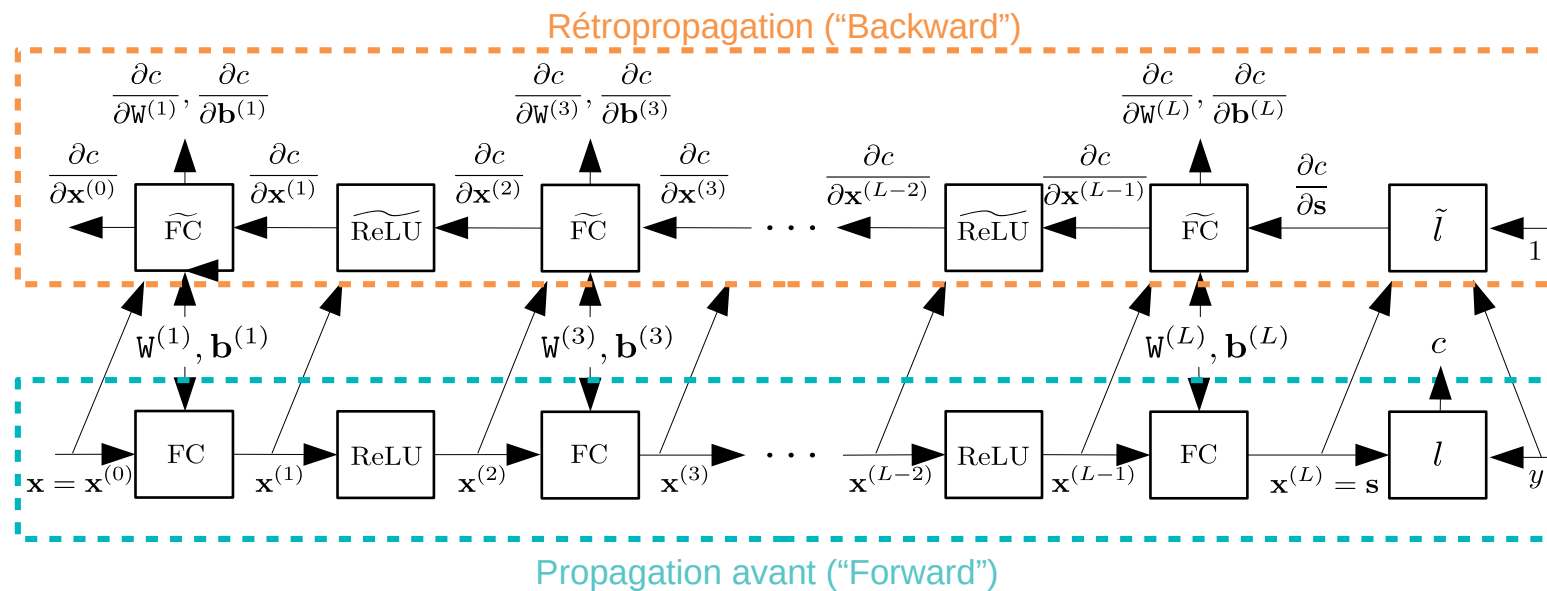
"Differentiable Programming"

Calcul automatique du gradient (suite)

Implémentation

$$\left. \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_k} = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial l(\mathbf{Y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{X}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_k}$$

Le plus économe en mémoire : on calcule les gradients l'un après l'autre en les accumulant.



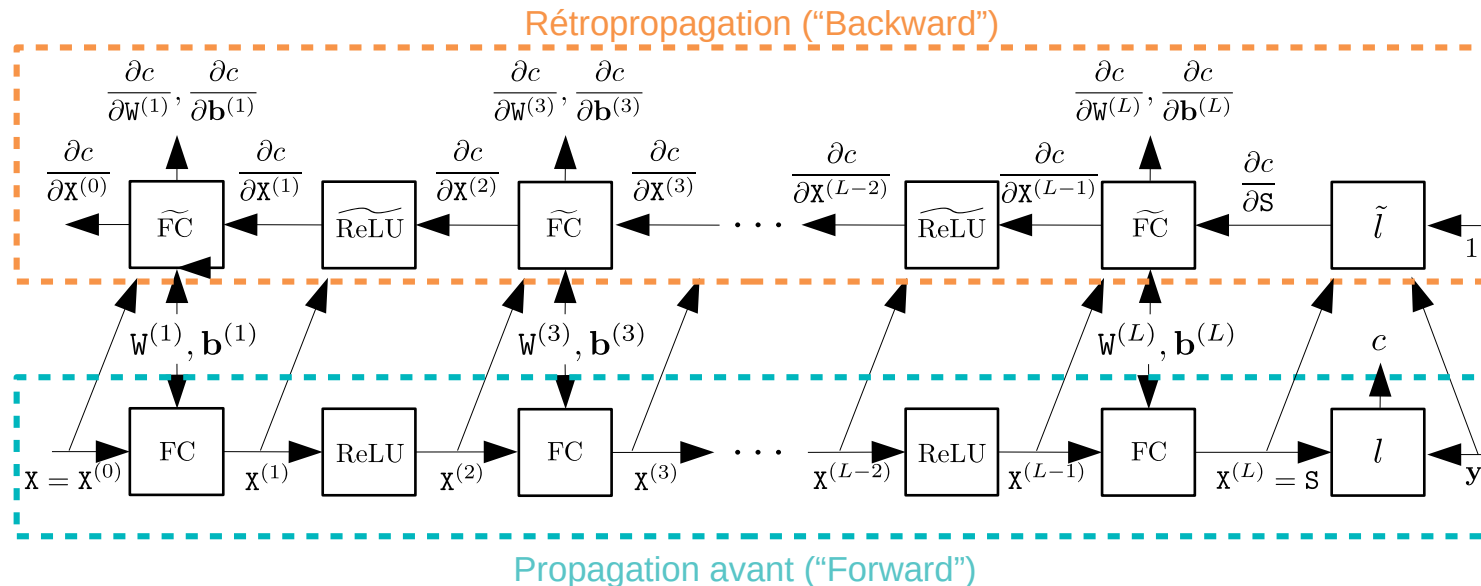
$\times N$

Calcul automatique du gradient (suite)

Implémentation

$$\left. \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_k} = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial l(\mathbf{Y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{X}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_k}$$

Le plus rapide : on calcule tous les gradients en parallèle, puis on les somme.



$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{train}}$

Initialisation des paramètres

- La méthode la plus utilisée consiste à initialiser les paramètres des FC aléatoirement (distribution normale ou uniforme).

Kaiming init.

$$\mathbf{W}_0 = \sqrt{\frac{6}{n_{\text{in}}}} \mathcal{U}_{[-1,1]}(n_{\text{out}}, n_{\text{in}}) \quad \mathbf{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{n_{\text{in}}}} \mathcal{U}_{[-1,1]}(n_{\text{out}})$$

He, K., et al. "Delving deep into rectifiers: Surpassing human-level performance on imagenet classification." ICCV 2015.

- D'autres méthodes existent mais sont moins utilisées (car la précédente fonctionne bien en pratique).

Mishkin, D., & Matas, J. All you need is a good init. 2015

Apprendre sur une grande base de données annotées

Descente de gradient
(GD) :

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_k}$$

Apprendre sur une grande base de données annotées

Descente de gradient
(GD) :

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_k}$$

Descente de gradient
stochastique (SGD) :

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_k}$$

Tirage aléatoire, à chaque itération, de $|\Omega_k|$
éléments dans la base de données

Apprendre sur une grande base de données annotées (suite)

Descente de gradient stochastique (SGD) :

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(\mathbf{Y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{X}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k}$$

1	2	3	4	5	6	7	8

$\mathbf{X}_{\text{train}}$

1	2	3	4	5	6	7	8

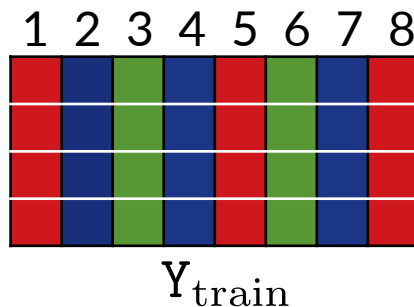
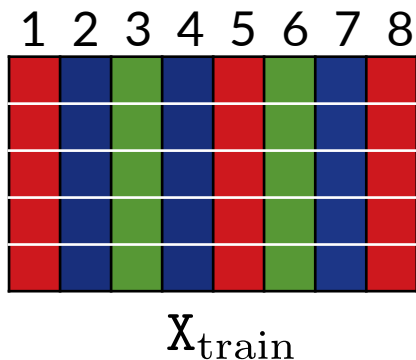
$\mathbf{Y}_{\text{train}}$

- 1) Découper aléatoirement la base de données en $|\Omega_k|$ « minibatches » de taille

Apprendre sur une grande base de données annotées (suite)

Descente de gradient stochastique (SGD) :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \theta_k}$$

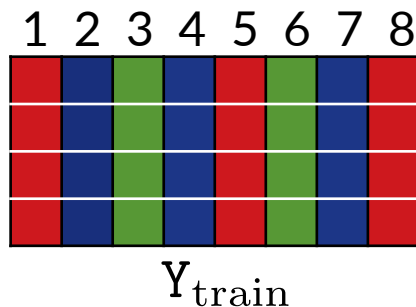
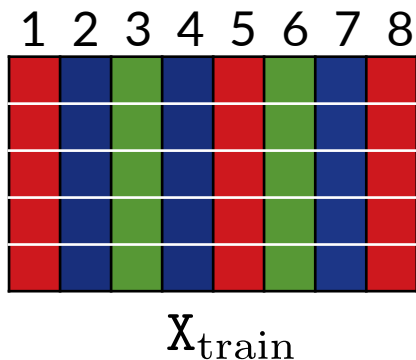


- 1) Découper aléatoirement la base de données en $|\Omega_k|$ « minibatches » de taille

Apprendre sur une grande base de données annotées (suite)

Descente de gradient stochastique (SGD) :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \theta_k}$$

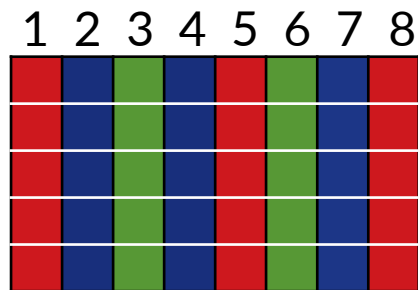


- 1) Découper aléatoirement la base de données en $|\Omega_k|$ « minibatches » de taille
- 2) Faire une itération de SGD sur chaque « minibatch »

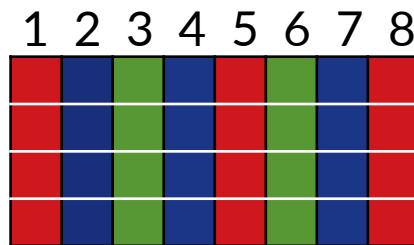
Apprendre sur une grande base de données annotées (suite)

Descente de gradient stochastique (SGD) :

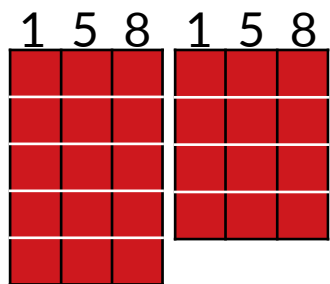
$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \theta_k}$$



X_{train}



Y_{train}



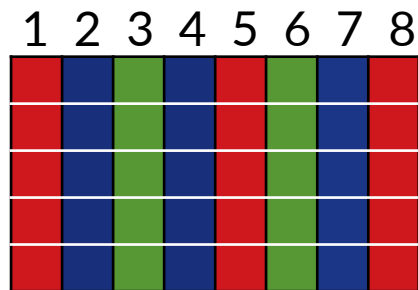
Minibatch 1

- 1) Découper aléatoirement la base de données en $|\Omega_k|$ « minibatches » de taille
- 2) Faire une itération de SGD sur chaque « minibatch »

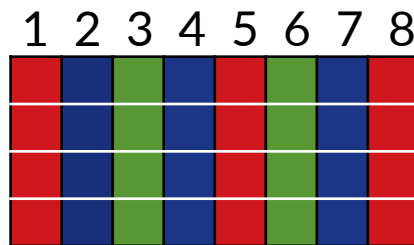
Apprendre sur une grande base de données annotées (suite)

Descente de gradient stochastique (SGD) :

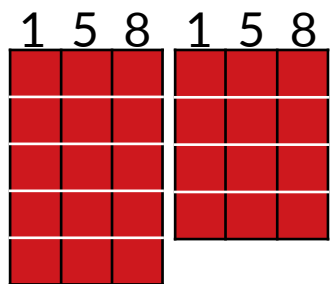
$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \theta_k}$$



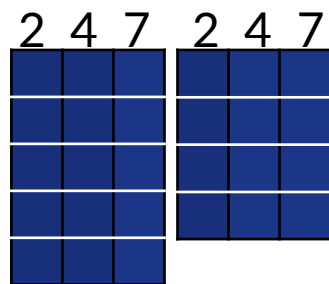
X_{train}



Y_{train}



Minibatch 1



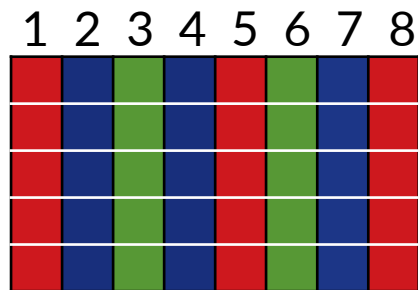
Minibatch 2

- 1) Découper aléatoirement la base de données en $|\Omega_k|$ « minibatches » de taille
- 2) Faire une itération de SGD sur chaque « minibatch »

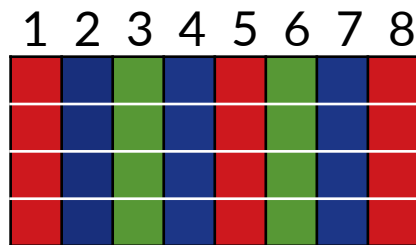
Apprendre sur une grande base de données annotées (suite)

Descente de gradient stochastique (SGD) :

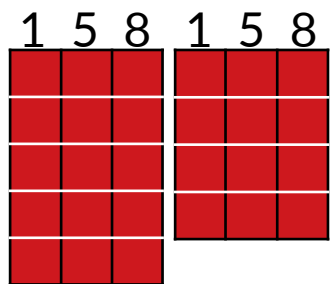
$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \theta_k}$$



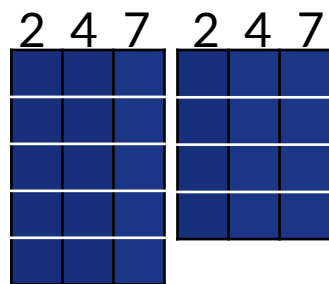
X_{train}



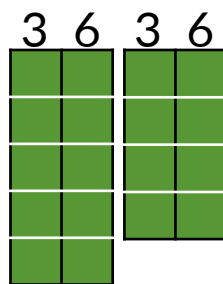
Y_{train}



Minibatch 1



Minibatch 2



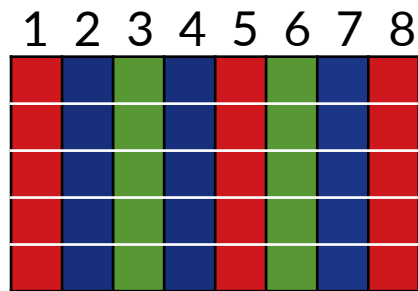
Minibatch 3

- 1) Découper aléatoirement la base de données en $|\Omega_k|$ « minibatches » de taille
- 2) Faire une itération de SGD sur chaque « minibatch »

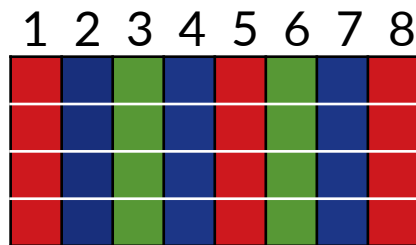
Apprendre sur une grande base de données annotées (suite)

Descente de gradient stochastique (SGD) :

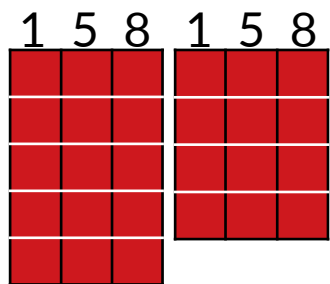
$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \theta_k}$$



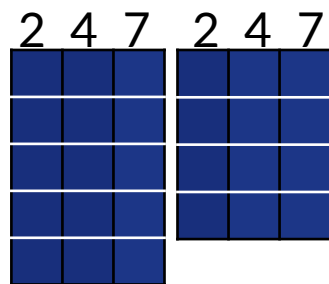
X_{train}



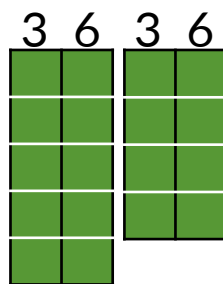
Y_{train}



Minibatch 1



Minibatch 2



Minibatch 3

Une « epoch » :

- 1) Découper aléatoirement la base de données en $|\Omega_k|$ « minibatches » de taille
- 2) Faire une itération de SGD sur chaque « minibatch »
- 3) Fin de l'« epoch », aller à 1)

Avantages et inconvénients de la SGD

$$\sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} - \sum_{i \notin \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Gradient SGD
(« minibatch »)

Gradient GD
(« base de données »)

« bruit »

Avantages et inconvénients de la SGD

$$\sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} - \sum_{i \notin \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Gradient SGD
(« minibatch »)

Gradient GD
(« base de données »)

« bruit »

Inconvénient : l'apprentissage peut être compliqué/lent si le « bruit » est trop important
(exemple : taille du « minibatch » trop faible)

Avantages et inconvénients de la SGD

$$\sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} - \sum_{i \notin \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Gradient SGD
(« minibatch »)

Gradient GD
(« base de données »)

« bruit »

Inconvénient : l'apprentissage peut être compliqué/lent si le « bruit » est trop important
(exemple : taille du « minibatch » trop faible)

Avantage 1 : ce « bruit » peut permettre de sortir ou d'éviter de mauvais minima locaux

Avantages et inconvénients de la SGD

$$\sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} - \sum_{i \notin \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Gradient SGD
(« minibatch »)

Gradient GD
(« base de données »)

« bruit »

Inconvénient : l'apprentissage peut être compliqué/lent si le « bruit » est trop important
(exemple : taille du « minibatch » trop faible)

Avantage 1 : ce « bruit » peut permettre de sortir ou d'éviter de mauvais minima locaux

Avantage 2 : le gradient est très rapide à calculer

Avantages et inconvénients de la SGD

$$\sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} - \sum_{i \notin \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Gradient SGD
(« minibatch »)

Gradient GD
(« base de données »)

« bruit »

Inconvénient : l'apprentissage peut être compliqué/lent si le « bruit » est trop important
(exemple : taille du « minibatch » trop faible)

Avantage 1 : ce « bruit » peut permettre de sortir ou d'éviter de mauvais minima locaux

Avantage 2 : le gradient est très rapide à calculer

Avantage 3 (empirique) : l'utilisation de petits « minibatches » (32-512) conduit à une meilleure généralisation que l'utilisation de grands « minibatches »

Avantages et inconvénients de la SGD

$$\sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} - \sum_{i \notin \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Gradient SGD
(« minibatch »)

Gradient GD
(« base de données »)

« bruit »

En pratique, on choisit une taille de « minibatch » de manière à **occuper entièrement le GPU**.

Avantages et inconvénients de la SGD

$$\sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} - \sum_{i \notin \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Gradient SGD
(« minibatch »)

Gradient GD
(« base de données »)

« bruit »

En pratique, on choisit une taille de « minibatch » de manière à **occuper entièrement le GPU**.

Si on a **besoin d'un « minibatch » plus grand...**

- on peut faire de l'**accumulation de gradient**, c'est-à-dire faire plusieurs « forward » + « backward »

Avantages et inconvénients de la SGD

$$\sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} - \sum_{i \notin \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Gradient SGD
(« minibatch »)

Gradient GD
(« base de données »)

« bruit »

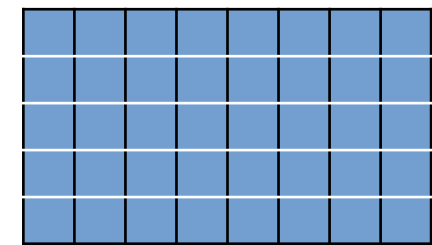
En pratique, on choisit une taille de « minibatch » de manière à **occuper entièrement le GPU**.

Si on a **besoin d'un « minibatch » plus grand...**

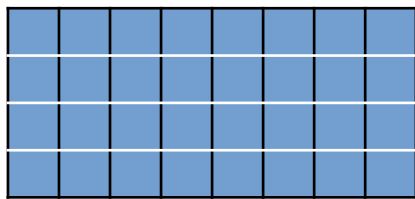
- on peut faire de l'**accumulation de gradient**, c'est-à-dire faire plusieurs « forward » + « backward »
- ou on peut utiliser **plusieurs GPUs** qui traitent des « minibatches » en parallèle !

VI)

Apprendre à « bien » prédire... sur de nouvelles données

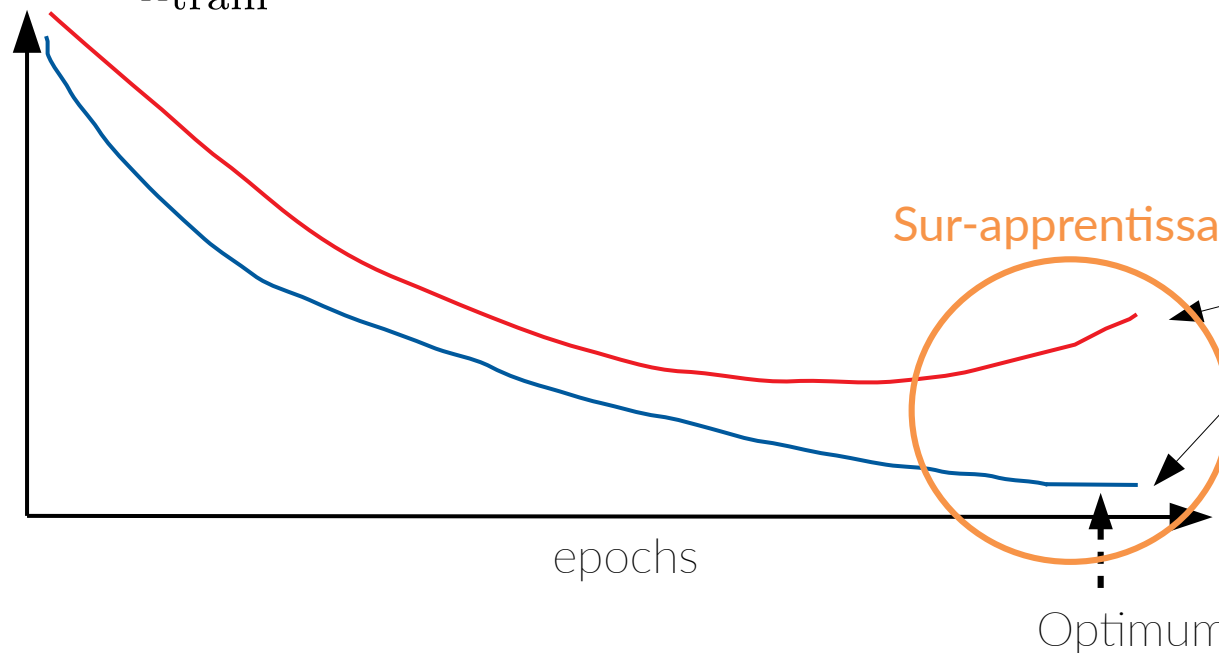


$\mathbf{X}_{\text{train}}$



$\mathbf{Y}_{\text{train}}$

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} L_{\text{train}}(\theta)$$



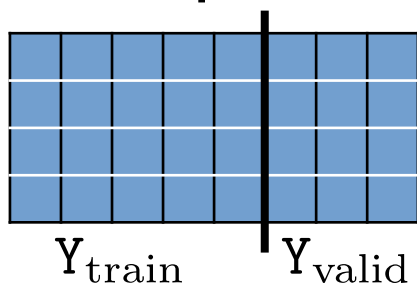
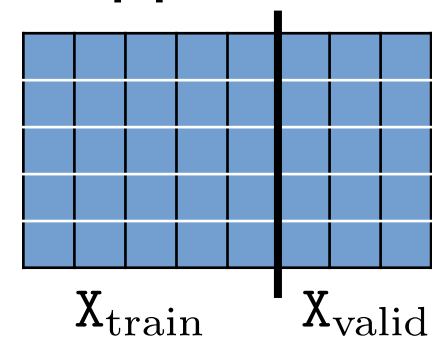
Sur-apprentissage

$$l(y_{\text{new}}, f(\mathbf{x}_{\text{new}}; \theta))$$

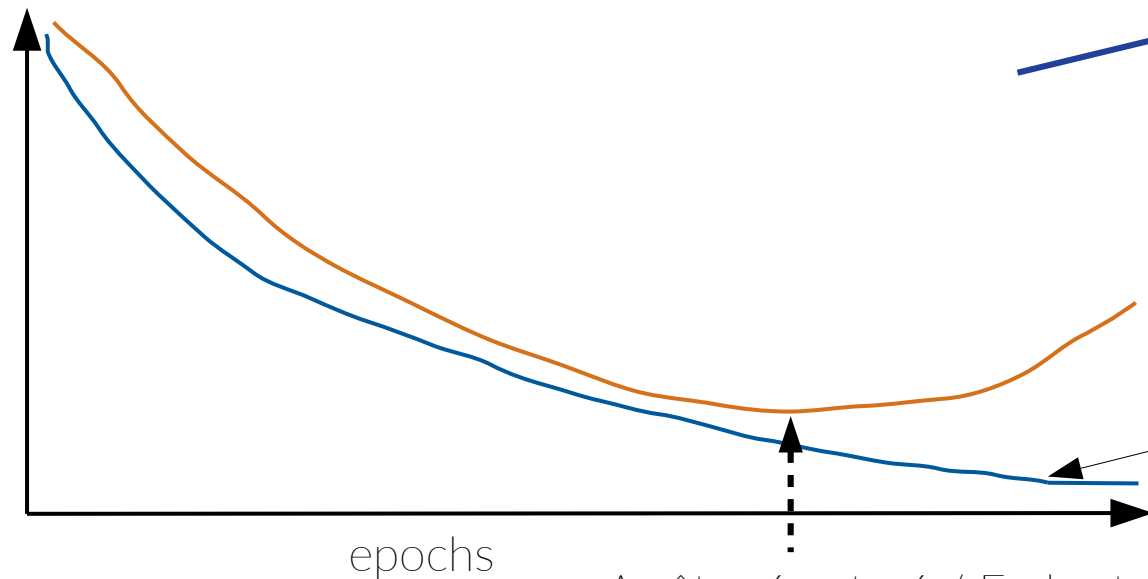
$$L_{\text{train}}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} l(\mathbf{Y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{X}_{\text{train},i}; \theta))$$

VI)

Apprendre à « bien » prédire... sur de nouvelles données (suite)



$$\theta^* = \arg \min_{\theta} L_{\text{train}}(\theta)$$

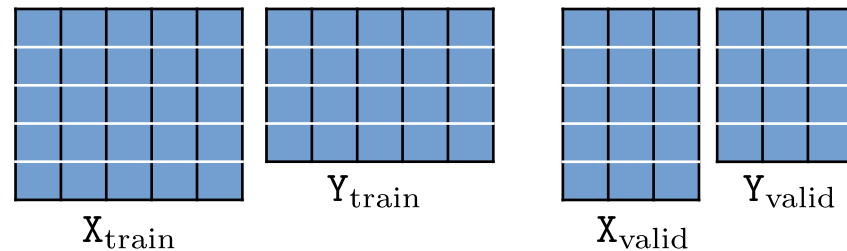


$$L_{\text{valid}}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_{\text{valid}}} l(Y_{\text{valid},i}, f(X_{\text{valid},i}; \theta))$$

$$L_{\text{train}}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))$$

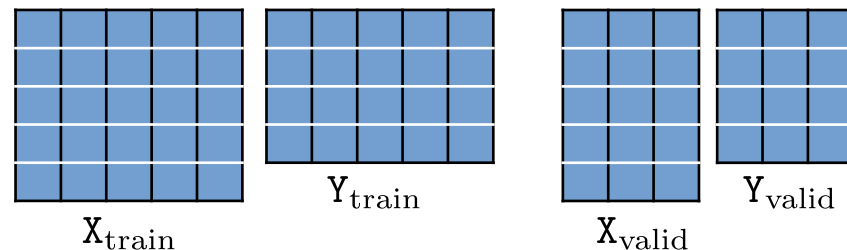
Résumé de l'étape d'apprentissage

- 1) Découper **une fois pour toutes** la base de données en
une base d'apprentissage (« training set »)
une base de validation (« validation set »)



Résumé de l'étape d'apprentissage

- 1) Découper **une fois pour toutes** la base de données en
une base d'apprentissage (« training set »)
une base de validation (« validation set »)



- 2) Lancer une descente de gradient stochastique (SGD) avec arrêt prématuré

Au début d'une « epoch », découper la base d'apprentissage aléatoirement en « minibatches »

Faire une itération de SGD sur chaque « minibatch » : $\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \theta_k}$

A la fin d'une « epoch », calculer $L_{\text{valid}}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_{\text{valid}}} l(Y_{\text{valid},i}, f(X_{\text{valid},i}; \theta))$

Stocker la valeur actuelle de θ si le coût de validation est plus faible que le précédent meilleur coût

Stopper l'entraînement lorsqu'on est en régime de « sur-apprentissage »

Bonnes pratiques

- Lancer un apprentissage sur un seul « minibatch » jusqu'à obtention d'un coût d'apprentissage de zéro

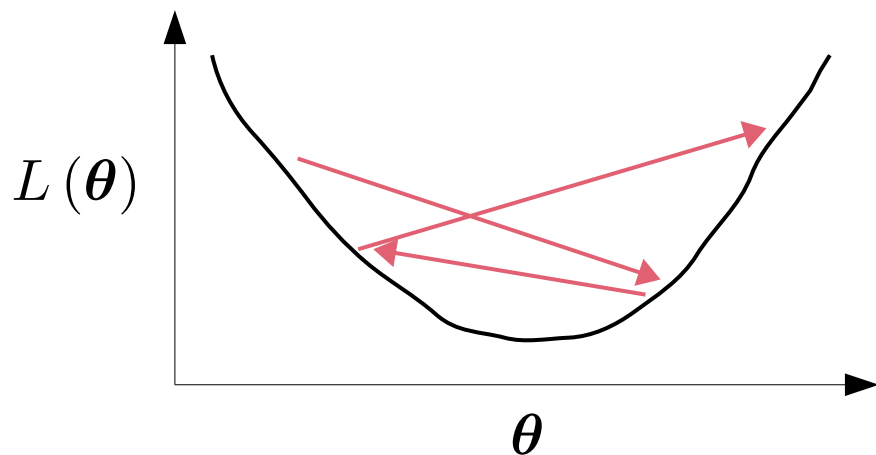
Bonnes pratiques

- Lancer un apprentissage sur un seul « minibatch » jusqu'à obtention d'un coût d'apprentissage de zéro
- Visualiser tout ce qu'il est possible de visualiser
 - Entrées → plage de valeurs (erreur classique : les données ne sont pas normalisées)
 - Sorties
 - Valeurs des paramètres
 - Valeur du pas d'apprentissage
 - Coûts (d'apprentissage, de validation, ...)
 - Gradients
 - ...

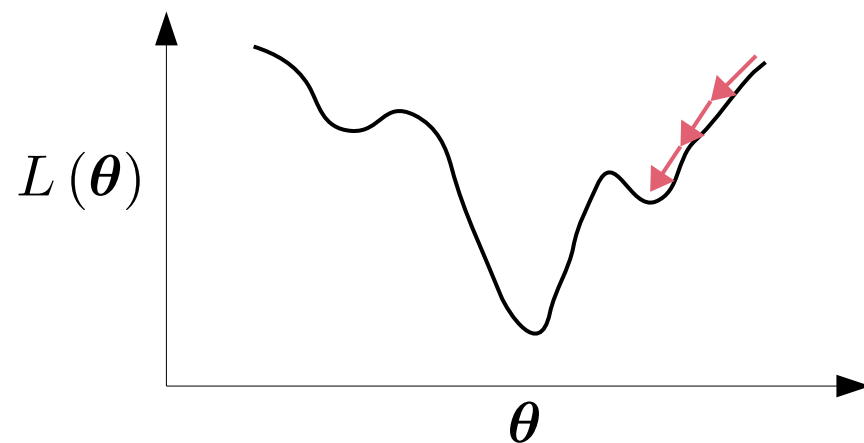
Définir la valeur du pas d'apprentissage

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$$

Pas d'apprentissage



Pas d'apprentissage trop grand



Pas d'apprentissage trop petit

Définir la valeur du pas d'apprentissage (suite)

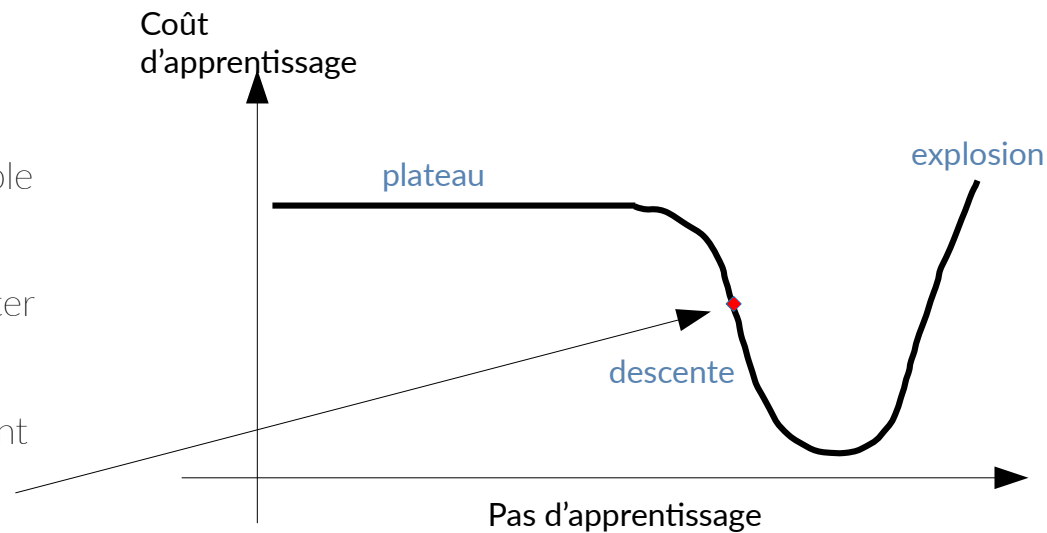
Solution 1 (la plus utilisée) : Tester différentes valeurs du pas d'apprentissage (« grid search ») en visualisant à chaque fois l'évolution du coût d'apprentissage (et du coût de validation)

Définir la valeur du pas d'apprentissage (suite)

Solution 1 (la plus utilisée) : Tester différentes valeurs du pas d'apprentissage (« grid search ») en visualisant à chaque fois l'évolution du coût d'apprentissage (et du coût de validation)

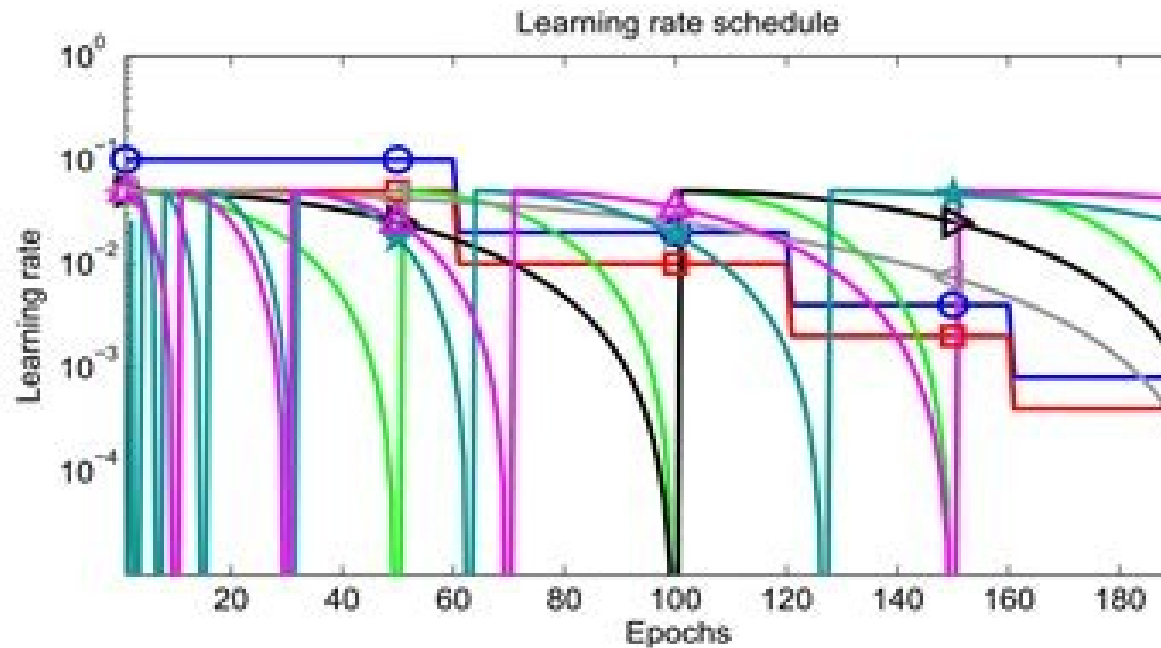
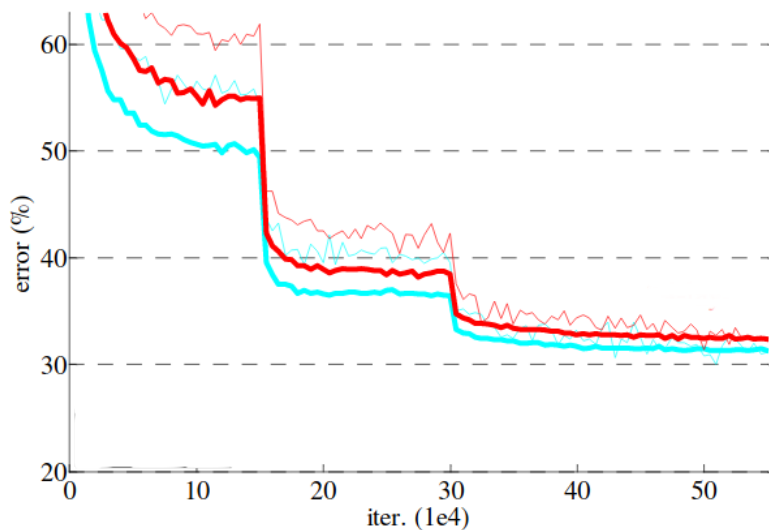
Solution 2 (rarement utilisée) :

- Lancer un entraînement en partant d'un pas très faible (e.g. $1e-7$).
- A chaque itération (i.e à chaque minibatch), augmenter le pas.
- Récupérer la valeur du pas correspondant au gradient le plus négatif.



Evolution du pas d'apprentissage durant l'optimisation

- Constant
- Décroissant
- Cyclique
- Réduction sur plateau



Loshchilov, I., & Hutter, F. "SGDR: Stochastic gradient descent with warm restarts." 2016

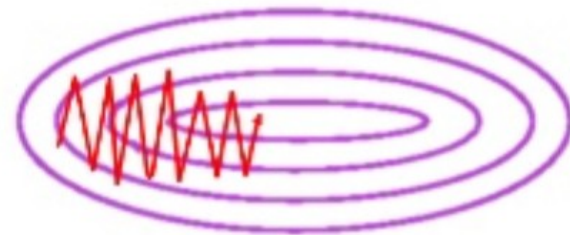
VI)

SGD avec moment (« SGD with momentum »)

$$\mathbf{g}_{k+1} = \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(\mathbf{y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{x}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k}$$

SGD

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \mathbf{g}_{k+1}$$



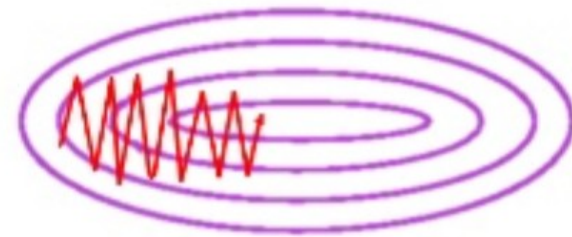
VI)

SGD avec moment (« SGD with momentum »)

$$\mathbf{g}_{k+1} = \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(\mathbf{y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{x}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k}$$

SGD

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \mathbf{g}_{k+1}$$

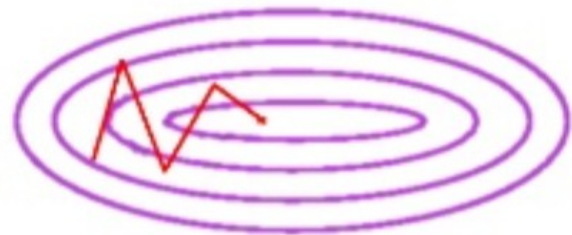


SGD avec moment

$$\mathbf{g}_{k+1} = \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(\mathbf{y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{x}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k}$$

$$\mathbf{m}_{k+1} = \beta \mathbf{m}_k + (1 - \beta) \mathbf{g}_{k+1}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \mathbf{m}_{k+1}$$



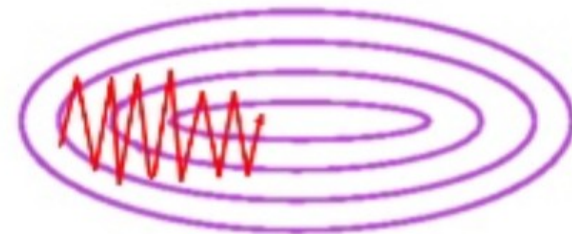
VI)

SGD avec moment (« SGD with momentum »)

$$\mathbf{g}_{k+1} = \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(\mathbf{y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{x}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k}$$

SGD

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \mathbf{g}_{k+1}$$



SGD avec moment

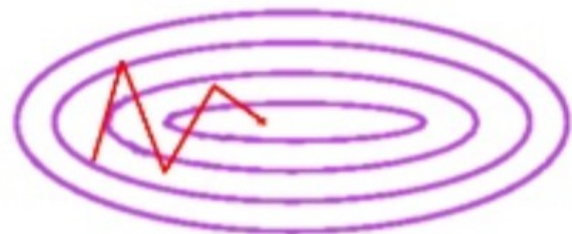
$$\mathbf{g}_{k+1} = \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(\mathbf{y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{x}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k}$$

$$\mathbf{m}_{k+1} = \beta \mathbf{m}_k + (1 - \beta) \mathbf{g}_{k+1}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \mathbf{m}_{k+1}$$



Moyenne mobile exponentielle du gradient
(permet de « lisser » le gradient)



« Adam: A Method for Stochastic Optimization »

$$\mathbf{g}_{k+1} = \sum_{i \in \Omega_k} \frac{\partial l(\mathbf{Y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{X}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k}$$

$$\mathbf{m}_{k+1} = \frac{1}{1 - \beta_1^k} (\beta_1 \mathbf{m}_k + (1 - \beta_1) \mathbf{g}_{k+1})$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = \frac{1}{1 - \beta_2^k} (\beta_2 \mathbf{v}_k + (1 - \beta_2) \mathbf{g}_{k+1}^2)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k - \alpha \frac{\mathbf{m}_{k+1}}{\sqrt{\mathbf{v}_{k+1}} + \epsilon}$$

Carré de chaque élément de \mathbf{g}_k

Racine carrée de chaque élément de \mathbf{V}_{k+1}

Autres techniques de régularisation

Régularisation : technique permettant de réduire le sur-apprentissage

Exemple déjà vu → « Early Stopping »

Autres techniques de régularisation

Régularisation : technique permettant de réduire le sur-apprentissage

Exemple déjà vu → « Early Stopping »

« Dropout » d'une couche FC

Lors de l'entraînement, mettre aléatoirement p % des colonnes de W à zéro (équivalent à mettre à zéro aléatoirement p % des « neurones » d'entrée)

Autres techniques de régularisation

Régularisation : technique permettant de réduire le sur-apprentissage

Exemple déjà vu → « Early Stopping »

« Dropout » d'une couche FC

Lors de l'entraînement, mettre aléatoirement p % des colonnes de W à zéro (équivalent à mettre à zéro aléatoirement p % des « neurones » d'entrée)

« Weight decay »

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_k} - \lambda \theta_k$$

→ AdamW

Tire les paramètres vers zéro

A priori un tel apprentissage ne devrait **PAS** fonctionner

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} L_{\text{train}}(\boldsymbol{\theta}) = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} l(\mathbf{Y}_{\text{train},i}, f(\mathbf{X}_{\text{train},i}; \boldsymbol{\theta}))$$

où $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = f_L \left(f_{L-1} \left(\dots f_2 \left(f_1 \left(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}^{(1)} \right); \boldsymbol{\theta}^{(2)} \right) \dots; \boldsymbol{\theta}^{(L-1)} \right); \boldsymbol{\theta}^{(L)} \right)$

Raisonnement a priori

descente de gradient où

f est non-convexe



mauvais minimum local

A priori un tel apprentissage ne devrait **PAS** fonctionner

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} L_{\text{train}}(\theta) = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^{N_{\text{train}}} l(Y_{\text{train},i}, f(X_{\text{train},i}; \theta))$$

où $f(\mathbf{x}; \theta) = f_L \left(f_{L-1} \left(\dots f_2 \left(f_1 \left(\mathbf{x}; \theta^{(1)} \right); \theta^{(2)} \right) \dots; \theta^{(L-1)} \right); \theta^{(L)} \right)$

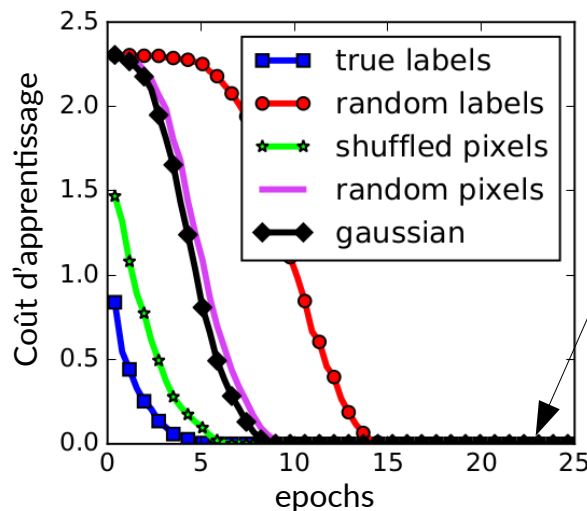
Raisonnement a priori

descente de gradient où f est non-convexe



mauvais minimum local

Résultats empiriques sur CIFAR10



Zéro !

Un des minima globaux a été atteint.

A priori un tel apprentissage ne devrait **PAS** fonctionner (suite)

Raisonnement a priori

Coût d'apprentissage atteint zéro



Le réseau a appris « par cœur » à
associer la bonne étiquette pour
chaque exemple de la base
d'apprentissage



Les performances de généralisation
seront très mauvaises

A priori un tel apprentissage ne devrait **PAS** fonctionner (suite)

Raisonnement a priori

Coût d'apprentissage atteint zéro

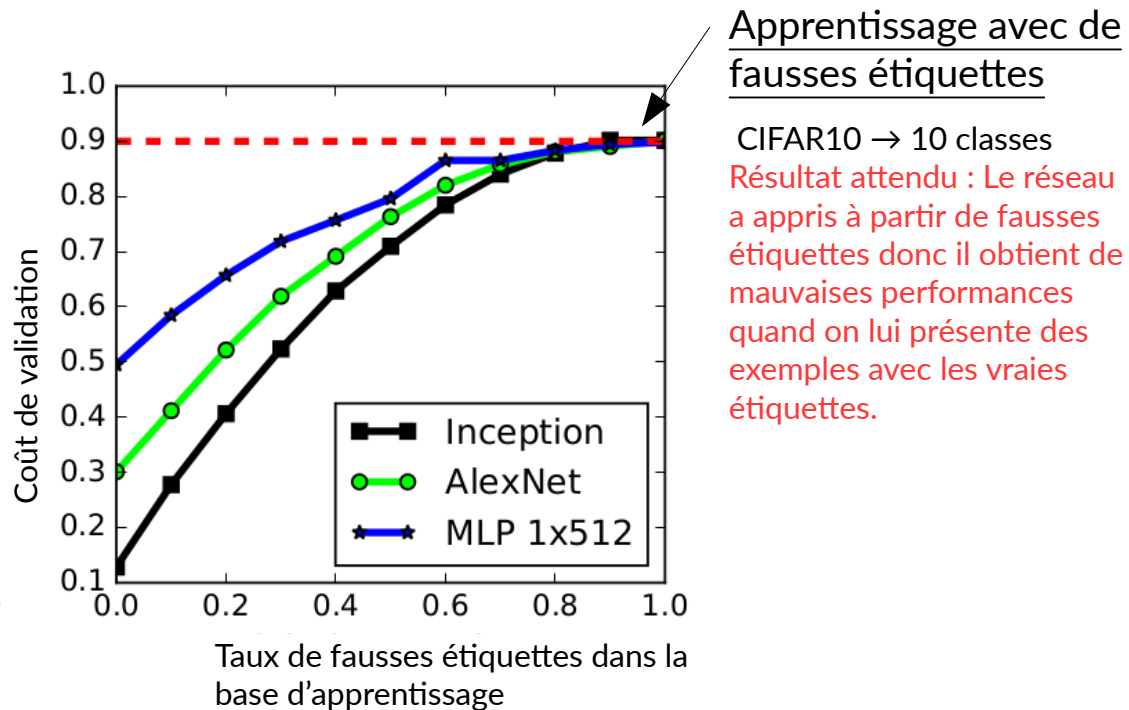


Le réseau a appris « par cœur » à associer la bonne étiquette pour chaque exemple de la base d'apprentissage



Les performances de généralisation seront très mauvaises

Résultats empiriques sur CIFAR10



A priori un tel apprentissage ne devrait PAS fonctionner (suite)

Raisonnement a priori

Coût d'apprentissage atteint zéro



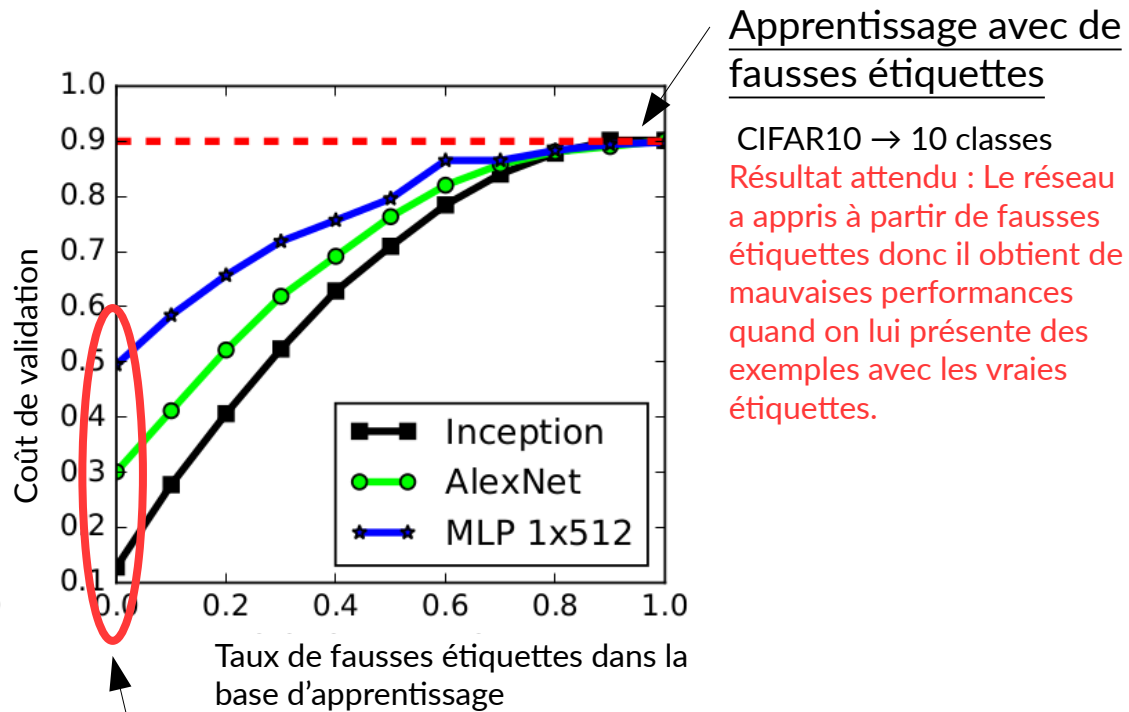
Le réseau a appris « par cœur » à associer la bonne étiquette pour chaque exemple de la base d'apprentissage



Les performances de généralisation seront très mauvaises

Zhang, C et al. (2017). Understanding Deep Learning requires rethinking generalization. ICLR

Résultats empiriques sur CIFAR10



Apprentissage avec les vraies étiquettes

→ Résultat inattendu : Quand le réseau apprend à partir de vraies étiquettes, il a une bonne capacité de généralisation.

A priori un tel apprentissage ne devrait **PAS** fonctionner (suite)

Comment se fait-il que l'étape d'apprentissage ait permis de trouver un minimum global qui généralise bien (sachant qu'il existe des minima globaux qui généralisent mal) ?

- 1) Biais introduit par l'architecture (« inductive bias »)
- 2) Biais introduit par la descente de gradient stochastique

<https://guillefix.me/nnbias/>

https://hackmd.io/75gt3X6WQbu1_A3pF8svWg

Valle-Pérez. G et al. (2019). Deep learning generalizes because the parameter-function map is biased towards simple functions. ICLR

Smith, S., et al. (2021). On the origin of implicit regularization on stochastic gradient descent. ICLR

Résumé des ingrédients du « Deep Learning »

1) Grande base de données étiquetées

2) « Bonne » architecture de réseau de neurones profond

- ▶ « Perceptron » multicouche, Réseau de neurones à convolution, Transformer
- ▶ Et optimisation par descente de gradient stochastique (AdamW, etc.)

3) Grande capacité de calculs en parallèle (GPU)